普通高等教育“十五”国家级规划教材

数学分析教程

（下册）

常庚哲　史济怀　编

高等教育出版社

ISBN 7-04-011921-8
9 787040 119213 >
定价 26.90 元

普通高等教育“十五”国家级规划教材

数学分析教程

(下册)

常庚哲　史济怀　编

高等教育出版社

内容提要

本书是普通高等院校“十五”国家级规划教材，是在1998年江苏教育出版社出版的《数学分析教程》的基础上作了较大的改动而成的，原书在全国同类教材中有非常积极的影响。

本书分上、下两册。下册内容包括：反常积分，Fourier分析，多变量函数的连续性，多变量函数的微分学，隐函数和隐映射定理，曲面的表示与逼近，多重积分，曲线积分，曲面积分，场的数学，含参变量积分等。

本书可供综合性大学和理工科院校数学系作为教材使用，也可作为其他科研人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

数学分析教程. 下/常庚哲，史济怀编. —北京：高等教育出版社，2003.6

ISBN 7-04-011921-8

Ⅰ.数… Ⅱ.①常…②史… Ⅲ.数学分析—高等学校—教材 Ⅳ.017

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第012683号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社　　址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-82028899		http://www.hep.com.cn

经　　销	新华书店北京发行所
印　　刷	中国农业出版社印刷厂

开　　本	787×960　1/16	版　　次	2003年6月第1版
印　　张	25.75	印　　次	2003年6月第1次印刷
字　　数	490 000	定　　价	26.90元

策划编辑　王　瑜
加工编辑　高尚华　文小西
封面设计　于　涛
责任绘图　朱　静
版式设计　马静如
责任校对　存　怡
责任印制　杨　明

郑重声明

反盗版举报电话：(010) 82028899 转 6897　(010)82086060

传真：(010) 82086060

E-mail：dd@hep.com.cn

通信地址：北京市西城区德外大街4号

高等教育出版社法律事务部

邮编：100011

购书请拨打读者服务部电话：(010)64054588

目　　录

第11章 反常积分

在§7.7中，我们介绍过两种反常积分——无穷积分和瑕积分，但对如何判断这两种积分的敛散，没有作进一步的讨论．学过无穷级数之后，再来学习反常积分的收敛判别法，就会发现两者在许多方面基本上是一样的．本章的目的是让读者学会判断反常积分敛散的方法，为讨论含参变量的反常积分作好准备．

§11.1 非负函数无穷积分的收敛判别法

在§7.7中定义过，无穷积分$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛，是指$f$在任意有限区间$[a,A]$中可积，而且

$$\lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)\mathrm{d}x$$

有有限的极限．如果记

$$F(A)=\int_a^A f(x)\mathrm{d}x,$$

那么$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛，就是指$\lim\limits_{A\to+\infty} F(A)$有有限的极限．这里$F(A)$就相当于无穷级数中的部分和．

在下面的讨论中，我们总假定f在任意有限区间$[a,A](A>a)$中可积，不再一一说明．

设$f\geqslant 0$，则积分$\int_a^A f(x)\mathrm{d}x$是上限A的增函数(这相当于正项级数中的部分和)，因而$\lim\limits_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)\mathrm{d}x$存在的充分必要条件是$\int_a^A f(x)\mathrm{d}x$对$A$而言有界．这样我们就得到

定理11.1 若f是$[a,+\infty)$上的非负函数，则积分

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

收敛的充分必要条件是$\int_a^A f(x)\,\mathrm{d}x$在$[a,+\infty)$上有界．

根据这个定理，就能得到类似于正项级数中的比较判别法.

定理 11.2 设对充分大的 x，函数 f 和 g 满足不等式

$$0 \leqslant f(x) \leqslant g(x),$$

那么

1° 若 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；

2° 若 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散，则 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 发散.

证明和级数中的比较判别法一样. □

设 $a>0$，则当 $p>1$ 时，积分 $\int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ 收敛；$p \leqslant 1$ 时，积分 $\int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ 发散，所以经常拿 f 和函数 $\frac{1}{x^p}$ 作比较，正像在正项级数中经常拿 a_n 和 $\frac{1}{n^\alpha}$ 作比较一样.

例 1 设 $a>0$，积分 $\int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^2+x^4}}$ 是收敛的. 这是因为

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x^2+x^4}} \leqslant \frac{1}{x^{4/3}},$$

而积分 $\int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{4/3}}$ 收敛，故由比较判别法知道原积分收敛. □

定理 11.2 的极限形式更便于应用.

定理 11.3 设 f 和 g 都是 $[a,+\infty)$ 上的非负函数，且

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l,$$

那么

1° 当 $0<l<+\infty$ 时，积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 和 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 同时敛散；

2° 当 $l=0$ 时，如果 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 收敛，那么 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 也收敛；

3° 当 $l=+\infty$ 时，如果 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 发散，那么 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 也发散.

证明和级数中相应的定理一样. □

例 2 积分 $\int_1^{+\infty} \frac{x^2}{x^4-x^2-1}\mathrm{d}x$ 是收敛的，因为当 $x\to+\infty$ 时，

$$\frac{x^2}{x^4-x^2-1} \sim \frac{1}{x^2},$$

而 $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ 是收敛的，由定理 11.3，原积分收敛. □

例 3 研究积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{(1+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x$ 的敛散性.

解 由于当 $x \to +\infty$ 时,

$$\frac{\arctan x}{(1+x^2)^{3/2}} \sim \frac{\pi}{2}\frac{1}{x^3},$$

所以原积分收敛. □

设 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 是一收敛的无穷积分，这里 f 不一定是非负的，$\{A_n\}(A_1 = a)$ 是任一递增趋于 $+\infty$ 的数列，那么

$$\int_a^{A_{N+1}} f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{N}\int_{A_n}^{A_{n+1}} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

让 $N \to \infty$，即得

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_n}^{A_{n+1}} f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1}$$

这就是说，一个收敛的无穷积分总可以写成上式右端那样的级数. 反过来，如果存在某个递增趋于 $+\infty$ 的数列 $\{A_n\}$，使得(1)右端的级数收敛，能否断言 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛呢？答案是否定的. 例如积分 $\int_0^{+\infty}\cos x\mathrm{d}x$ 是发散的，这是因为

$$\lim_{A\to+\infty}\int_0^A \cos x\mathrm{d}x = \lim_{A\to+\infty}\sin A$$

不存在. 但若取 $A_n = n\pi$，它是一个趋于 $+\infty$ 的递增数列，这时级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_{A_n}^{A_{n+1}}\cos x\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\cos x\mathrm{d}x = 0$$

却是收敛的.

但若 f 是非负的，那么答案是肯定的.

定理 11.4 设 f 是 $[a,+\infty)$ 上的非负函数，如果存在一个递增趋于 $+\infty$ 的数列 $\{A_n\}(A_1 = a)$，使得级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_n}^{A_{n+1}} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{2}$$

收敛，那么积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，并且

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_n}^{A_{n+1}} f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{3}$$

证明 因为 $\{A_n\}$ 是趋于 $+\infty$ 的递增数列，对于任意给定的 $A>0$，总能找到正整数 N，使得 $A_N \leqslant A < A_{N+1}$. 由于 $f(x) \geqslant 0$，所以

$$\sum_{n=1}^{N-1}\int_{A_n}^{A_{n+1}} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^A f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{n=1}^{N}\int_{A_n}^{A_{n+1}} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

从(2)收敛，即知$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛，而且(3)成立. □

下面是应用这个定理的一个例子.

例 4 证明积分$\int_0^{+\infty}\frac{x\mathrm{d}x}{1+x^6\sin^2 x}$收敛.

证明 因为被积函数是非负的，只要证明级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{x\mathrm{d}x}{1+x^6\sin^2 x} \tag{4}$$

收敛即可. 因为$\sin^2 x$是周期π的偶函数，故有

$$\begin{aligned}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{x\mathrm{d}x}{1+x^6\sin^2 x} &\leqslant (n+1)\pi\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+n^6\sin^2 x} = 2(n+1)\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{1+n^6\sin^2 x}\\ &= 2(n+1)\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x+(1+n^6)\sin^2 x}\\ &\leqslant \frac{2(n+1)\pi}{n^3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}(n^3\tan x)}{1+(n^3\tan x)^2}\\ &= \frac{2(n+1)\pi}{n^3}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}\leqslant\frac{2\pi^2}{n^2}.\end{aligned}$$

由此即知级数(4)收敛，因而原积分收敛. □

从无穷级数收敛的定义立刻可以得到，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛的必要条件是$\lim_{n\to\infty}a_n=0$. 自然联想到，$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$收敛的必要条件是不是$\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$? 这是不对的. 例4就是这样一个例子. 这里

$$f(x)=\frac{x}{1+x^6\sin^2 x}$$

是$(0,+\infty)$上的正值连续函数，虽然$\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$收敛，但当$x\to+\infty$时，不仅$f(x)$不趋于0，而且是无界的，因为当$x=n\pi$时，$f(n\pi)=n\pi$.

练习题 11.1

1. 判断下列无穷积分的敛散性：

(1) $\int_1^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$； (2) $\int_0^{+\infty}\frac{3x^3-2}{x^5-x^3+1}\mathrm{d}x$；

(3) $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+1}}$； (4) $\int_e^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(\log x)^p}$；

(5) $\int_1^{+\infty} x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$； (6) $\int_1^{+\infty} \frac{(\log x)^p}{1+x^2}\mathrm{d}x, p>0$.

2. 设 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛，如果 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$ 存在，那么必有 $b=0$.

3. 证明积分 $\int_0^{+\infty} \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^{\alpha}\cos^2 x}$ $(\alpha>4)$ 收敛.

4. 证明积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛于 I 的充分必要条件是，对任一递增趋于 $+\infty$ 的数列 $\{A_n\}$ $(A_1=a)$，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_{A_n}^{A_{n+1}} f(x)\,\mathrm{d}x$ 都收敛于 I.

5. 设 a，$b>0$，证明

$$\int_0^{+\infty} f\left(\left(ax-\frac{b}{x}\right)^2\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\int_0^{+\infty} f(x^2)\,\mathrm{d}x.$$

利用这公式计算积分 $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\left(ax-\frac{b}{x}\right)^2}\mathrm{d}x$，其中 $a,b>0$.

$\left(\text{已知}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.\right)$

§ 11.2 无穷积分的 Dirichlet 和 Abel 收敛判别法

和无穷级数一样，无穷积分也有相应的 Cauchy **收敛原理**. 回忆一下，在练习题 2.5 的第 9 题中，我们已经证明过：$\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$存在的充分必要条件是对任意 $\varepsilon>0$，存在一个正数 A，只要 A'，$A''>A$，便有

$$|F(A')-F(A'')|<\varepsilon.$$

利用这个事实，立刻可得

定理 11.5（**Cauchy 收敛原理**） 积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛的充分必要条件是，对任意 $\varepsilon>0$，存在 $A_0>a$，只要 A'，$A''>A_0$，便有

$$\left|\int_{A'}^{A''} f(x)\,\mathrm{d}x\right|<\varepsilon.$$

这个定理说明，要想使反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛，必须而且只需在充分远的、不管多长的区间上，积分值可以任意小.

根据定理 11.5，容易证明

定理 11.6 如果积分$\int_a^{+\infty} |f(x)| \mathrm{d}x$收敛,那么积分$\int_a^{+\infty} f(x) \mathrm{d}x$也收敛.

证明 由于$\int_a^{+\infty} |f(x)| \mathrm{d}x$收敛,故对$\varepsilon > 0$,存在$A_0$,当$A'$、$A'' > A_0$时,就有$\int_{A'}^{A''} |f(x)| \mathrm{d}x < \varepsilon$,所以

$$\left|\int_{A'}^{A''} f(x) \mathrm{d}x\right| \leqslant \int_{A'}^{A''} |f(x)| \mathrm{d}x < \varepsilon. \quad \square$$

仿照无穷级数中的说法,如果积分$\int_a^{+\infty} |f(x)| \mathrm{d}x$收敛,就说积分$\int_a^{+\infty} f(x) \mathrm{d}x$**绝对收敛**.

定理 11.6 断言,绝对收敛的积分一定收敛. 和无穷级数的情形一样,定理 11.6 的逆定理是不成立的(见下面的例 1).

如果积分$\int_a^{+\infty} f(x) \mathrm{d}x$收敛,而$\int_a^{+\infty} |f(x)| \mathrm{d}x$发散,就称积分$\int_a^{+\infty} f(x) \mathrm{d}x$**条件收敛**.

利用 Cauchy 收敛原理,可以得到类似于无穷级数中的 Dirichlet 和 Abel 判别法,但还需要一个类似于 Abel 引理的结果. 这就是下面的

定理 11.7 (第二积分平均值定理) 若函数f在$[a,b]$上可积,g在$[a,b]$上非负且递减,则必存在$\xi \in [a,b]$,使得

$$\int_a^b f(x) g(x) \mathrm{d}x = g(a) \int_a^{\xi} f(x) \mathrm{d}x.$$

证明 因为f在$[a,b]$上可积,g是$[a,b]$上的非负减函数,也是可积函数,因而fg在$[a,b]$上可积. 用分割

$$\pi: \ a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

细分区间$[a,b]$,fg在$[a,b]$上的积分可写为

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) g(x) \mathrm{d}x &= \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) g(x) \mathrm{d}x \\ &= \sum_{i=1}^{n} g(x_{i-1}) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) \mathrm{d}x \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) (g(x) - g(x_{i-1})) \mathrm{d}x. \qquad (1)\end{aligned}$$

如果用K表示$|f|$在$[a,b]$上的一个上界,ω_i表示g在小区间$[x_{i-1},x_i]$上的振幅,那么(1)右端第二个和数的绝对值不超过

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(x)| |g(x) - g(x_{i-1})| \mathrm{d}x \leqslant K \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i.$$

因为 g 在$[a,b]$上可积，所以

$$\lim_{\|\pi\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i = 0.$$

于是(1)可写成

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\|\pi\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} g(x_{i-1})\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{2}$$

若记 $b_i = g(x_{i-1})$，$i=1,\cdots,n$，则因 g 是非负递减的，故有

$$b_1\geqslant b_2\geqslant\cdots\geqslant b_n\geqslant 0, \tag{3}$$

再记 $a_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,\mathrm{d}x$,那么 $S_k = \sum_{i=1}^{k} a_i = \int_a^{x_k} f(x)\,\mathrm{d}x$. 由于 $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 是$[a,b]$上的连续函数,它在$[a,b]$上的最大值和最小值分别记为 M 和 m,那么

$$m\leqslant S_k = \int_a^{x_k} f(t)\,\mathrm{d}t = F(x_k)\leqslant M, k = 1,\cdots,n, \tag{4}$$

应用 Abel 的分部求和公式(引理 9.2)，(2)右端的和式可写成

$$\sum_{i=1}^{n} g(x_{i-1})\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = \sum_{i=1}^{n-1} S_i(b_i - b_{i+1}) + S_n b_n.$$

利用(3)和(4)即得

$$mg(a) = mb_1\leqslant\sum_{i=1}^{n} g(x_{i-1})\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant Mb_1 = Mg(a).$$

在上式中命 $\|\pi\|\to 0$，由(2)即得

$$mg(a)\leqslant\int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x\leqslant Mg(a).$$

由 F 的连续性，根据连续函数的介值定理，存在 $\xi\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x = g(a)\int_a^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x. \quad\square$$

如果 g 在$[a,b]$上非负且递增，则可用同样的方法证明，存在 $\eta\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x = g(b)\int_{\eta}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

如果 g 在$[a,b]$中不保持定号，这时有

定理 11.8 (推广的第二积分平均值定理) 设 f 在$[a,b]$中可积，g 在$[a,b]$中单调，则必存在 $\xi\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x = g(a)\int_a^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x + g(b)\int_{\xi}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{5}$$

证明 不妨设 g 在$[a,b]$上递减，则对任意 $x\in[a,b]$，均有 $g(x)\geqslant g(b)$.

命

$$\varphi(x)=g(x)-g(b),$$

那么 φ 在$[a,b]$上非负且递减. 由定理 11.7 知道，存在 $\xi\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x=\varphi(a)\int_a^{\xi}f(x)\,\mathrm{d}x,$$

即

$$\int_a^b f(x)(g(x)-g(b))\,\mathrm{d}x=(g(a)-g(b))\int_a^{\xi}f(x)\,\mathrm{d}x.$$

由此即得(5).

如果 g 在$[a,b]$上递增，则可命 $\psi(x)=g(b)-g(x)$，仍用定理 11.7 可得(5). □

第二积分平均值定理的好处是把两个函数乘积的积分化为一个函数的积分来处理. 下面的 Dirichlet 和 Abel 判别法正是利用了这样一个好处.

定理 11.9（Dirichlet 判别法） 如果 f 和 g 满足下面两个条件：

1° $F(A)=\int_a^A f(x)\,\mathrm{d}x$ 在$(a,+\infty)$上有界；

2° g 在$[a,+\infty)$上单调，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$，

那么积分

$$\int_a^{+\infty}f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

收敛.

证明 应用推广的第二积分平均中值定理，有

$$\int_{A'}^{A''}f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=g(A')\int_{A'}^{\xi}f(x)\,\mathrm{d}x+g(A'')\int_{\xi}^{A''}f(x)\,\mathrm{d}x,$$

其中 $\xi\in[A',A'']$. 由此可得

$$\left|\int_{A'}^{A''}f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant|g(A')|\left|\int_{A'}^{\xi}f(x)\,\mathrm{d}x\right|+|g(A'')|\left|\int_{\xi}^{A''}f(x)\,\mathrm{d}x\right|.\tag{6}$$

由条件 1°，存在常数 M，使得

$$|F(A)|=\left|\int_a^A f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant M,A\in(a,+\infty).$$

因而

$$\left|\int_{A'}^{\xi}f(x)\,\mathrm{d}x\right|=\left|\int_a^{\xi}f(x)\,\mathrm{d}x-\int_a^{A'}f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant 2M,$$

$$\left|\int_{\xi}^{A''}f(x)\,\mathrm{d}x\right|=\left|\int_a^{A''}f(x)\,\mathrm{d}x-\int_a^{\xi}f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant 2M.$$

由条件 2°，对任意 $\varepsilon>0$，存在 $A_0>0$，当 A'，$A''>A_0$ 时，有

$$|g(A')|<\varepsilon,\ |g(A'')|<\varepsilon.$$

所以只要 A'，$A''>A_0$，由(6)便可推出

$$\left|\int_{A'}^{A''}f(x)g(x)\mathrm{d}x\right|<4M\varepsilon,$$

因而由 Cauchy 收敛原理，积分 $\int_a^{+\infty}f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛. □

例 1 证明积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 收敛，积分 $\int_1^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x}\mathrm{d}x$ 发散.

证明 因为对任意 $A\geqslant 1$，

$$\left|\int_1^A\sin x\mathrm{d}x\right|=|\cos A-\cos 1|\leqslant 2.$$

且 $\frac{1}{x}$ 当 $x\to+\infty$ 时递减趋于 0，故由 Dirichlet 判别法，$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 收敛. 因为

$$\frac{|\sin x|}{x}\geqslant\frac{\sin^2x}{x}=\frac{1}{2x}-\frac{\cos 2x}{2x},$$

用和上面一样的方法知道 $\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x}\mathrm{d}x$ 收敛，但 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}\mathrm{d}x$ 发散，所以 $\int_1^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x}\mathrm{d}x$ 发散. □

积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 是一个条件收敛的例子.

定理 11.10（Abel 判别法） 如果 f 和 g 满足下面两个条件：

1° 积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；

2° g 在 $[a,+\infty)$ 上单调有界，

那么积分

$$\int_a^{+\infty}f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

收敛.

证明 因为 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，所以对任意 $\varepsilon>0$，存在 A_0，只要 $A',A''>A_0$，便有 $\left|\int_{A'}^{A''}f(x)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon$. 由于 g 在 $[a,+\infty)$ 上单调有界，设 $|g(x)|\leqslant M$，$x\in[a,+\infty)$. 于是由推广的第二积分平均值定理即得

$$\begin{aligned}\left|\int_{A'}^{A''}f(x)g(x)\mathrm{d}x\right|&\leqslant|g(A')|\left|\int_{A'}^{\xi}f(x)\mathrm{d}x\right|\\&\quad+|g(A'')|\left|\int_{\xi}^{A''}f(x)\mathrm{d}x\right|\\&\leqslant 2M\varepsilon.\end{aligned}$$

由 Cauchy 收敛原理即知 $\int_A^{+\infty} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛. □

练习题　11.2

1. 研究下列积分的敛散性:

(1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\cos x}{1+x}\mathrm{d}x$;

(2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(a+2)x}{1+x^a}\mathrm{d}x, a>0$;

(3) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos^2 x}{x}\mathrm{d}x$;

(4) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(x^a)\,\mathrm{d}x, a>1$.

2. 研究下列积分的绝对收敛性和条件收敛性:

(1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\sin x}{1+x}\mathrm{d}x$;

(2) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(1-2x)}{\sqrt{x^3}\sqrt[3]{x^2+1}}\mathrm{d}x$;

(3) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x^2+x+1}}\mathrm{d}x$;

(4) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\sin x}{x\log x}\mathrm{d}x$.

3. 设 f 为非负减函数, 且 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛. 证明当 $x\to+\infty$ 时,

$$f(x)=o\left(\frac{1}{x}\right).$$

4. 设 f 在 $[a,+\infty)$ 上递减趋于 0. 试用 Dirichlet 判别法证明, 积分

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \text{ 和 } \int_a^{+\infty} f(x)\sin^2 x\,\mathrm{d}x$$

同时敛散.

问题　11.2

1. 设 $0<\alpha\leqslant\frac{1}{2}$, 证明积分

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha+\sin x}\mathrm{d}x$$

发散.

2. 设对任意 $b>0$，f 在$[0,b]$可积. 如果 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=a$，证明

$$\lim_{t\to 0^+} t\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx} f(x)\,\mathrm{d}x = a.$$

3. 证明积分 $\int_0^{+\infty}(-1)^{[x^2]}\mathrm{d}x$ 收敛，这里$[x^2]$是 x^2 的整数部分.

4. 设 f，g 在$[a,b]$上连续，g 在(a,b)内可微，而且 $g'(x)\geqslant 0\ (a<x<b)$，试用分部积分公式证明第二积分平均值定理.

5. 设 P_m 和 P_n 分别为 m 和 n 次多项式，且当 $x\geqslant a$ 时，$P_n(x)>0$. 试研究积分

$$\int_a^{+\infty}\frac{P_m(x)}{P_n(x)}\sin x\,\mathrm{d}x$$

的绝对收敛性和条件收敛性.

6. 如果 f 在$[a,+\infty)$上连续可微，且 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 和 $\int_a^{+\infty} f'(x)\mathrm{d}x$ 都收敛，则必有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

§ 11.3　瑕积分的收敛判别法

现在讨论另一种反常积分——瑕积分.

我们知道，如果函数 f 定义在区间$(a,b]$上，当 $x\to a^+$ 时，f 无界，则称 a 为 f 的**瑕点**. 这时 f 在$(a,b]$上按 Riemann 积分的意义是不可积的. 但若对任意 $\varepsilon>0$，f 在$[a+\varepsilon,b]$上可积，而且

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

有有限的极限，则称瑕积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，并把上面的极限定义为瑕积分的值. 在 § 7.7 中我们已经见到不少瑕积分的例子.

如何判断瑕积分的敛散性？先看一个简单的例子. 为了研究积分 $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$ 的收敛性，作变换 $\frac{1}{\sqrt{x}}=y$，即得

$$\int_\varepsilon^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = 2\int_1^{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}}\frac{\mathrm{d}y}{y^2},$$

这样就把判断瑕积分 $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$ 收敛的问题归结为判断无穷积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}y}{y^2}$ 的收敛问题.

一般来说，如果 a 是 f 的瑕点，作变换 $x = a + \frac{1}{y}$，那么

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = -\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\frac{1}{\varepsilon}}^{\frac{1}{b-a}} f\left(a+\frac{1}{y}\right)\frac{1}{y^2}\mathrm{d}y$$
$$= \int_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} f\left(a+\frac{1}{y}\right)\frac{1}{y^2}\mathrm{d}y.$$

这就是说，通过上面的变换，每一个瑕积分一定可以化成一个无穷积分. 因此，前面那些判断无穷积分收敛的方法，都可以平行地对瑕积分建立起来. 这里我们不再重复这些定理的证明，而只是把结果写下来，请读者补出这些定理的证明，这将是很好的练习.

为简单起见,下面的定理中都假定积分下限 a 是瑕点,f 和 g 都在 $[a+\varepsilon, b]$ 中可积.

定理 11.2′ 设对充分靠近 a 的 $x\ (x>a)$，f 和 g 满足不等式

$$0 \leqslant f(x) \leqslant g(x),$$

那么

1° 若 $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛,则 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛;

2° 若 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散,则 $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ 发散.

定理 11.3′ 设 f 和 g 都是 $(a,b]$ 上的非负函数，且

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)} = l,$$

那么

1° 当 $0<l<+\infty$ 时，积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 和 $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ 同时敛散;

2° 当 $l=0$ 时,如果 $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛,那么 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 也收敛;

3° 当 $l=+\infty$ 时,如果 $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ 发散,那么 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 也发散.

定理 11.5′(Cauchy 收敛原理) 积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛的充分必要条件是，对任意 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,只要 $0<\eta<\delta, 0<\eta'<\delta$,就有

$$\left|\int_{a+\eta}^{a+\eta'} f(x)\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon.$$

定理 11.6′ 如果积分 $\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$ 收敛,那么积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 也收敛.

这个定理的逆定理也是不成立的，下面的例 5 便是这样一个例子. 从这里可看出反常积分和普通的 Riemann 积分的差别. 在 Riemann 积分的情形下，从 f 可积可以推出 $|f|$ 可积，但从 $|f|$ 可积不能推出 f 可积. 这里的情况正好反了过来.

瑕积分的绝对收敛和条件收敛的概念和无穷积分是一样的，不再赘述.

定理 11.9′（**Dirichlet 判别法**） 如果 f 和 g 满足下面两个条件：

1° 存在 $M>0$，使得对任意 $0<\eta<b-a$ 有

$$\left|\int_{a+\eta}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant M;$$

2° g 在 $(a,b]$ 中单调，且 $\lim\limits_{x\to a^+} g(x)=0$，

那么积分

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x$$

收敛.

定理 11.10′（**Abel 判别法**） 如果 f 和 g 满足下面两个条件：

1° 积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛；

2° g 在 $(a,b]$ 中单调有界，

那么积分

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

收敛.

关于上限是瑕点的瑕积分也有这些收敛判别法，请读者自己写出这些定理并给出相应的证明.

例 1 研究积分 $\int_0^1 \frac{\log x}{1-x^2}\mathrm{d}x$ 的敛散性.

解 看上去似乎 $x=0$，$x=1$ 都是瑕点，但实际上由于

$$\lim_{x\to 1}\frac{\log x}{1-x^2}=-\frac{1}{2},$$

被积函数在 $x=1$ 附近是有界的，因此 $x=1$ 并非瑕点.

考虑 $x=0$ 附近的情况. 对于充分小的 x，恒有 $1-x^2\geqslant\frac{1}{2}$，所以

$$\left|\frac{\log x}{1-x^2}\right|\leqslant 2|\log x|,$$

而积分 $\int_0^1 |\log x|\,\mathrm{d}x=-\int_0^1\log x\mathrm{d}x$ 是收敛的，因此原积分收敛. □

例2 研究积分 $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{1-x^4}}$ 的敛散性.

解 $x=1$ 是瑕点．当 $x\to 1$ 时

$$\frac{1}{\sqrt[4]{1-x^4}}=\frac{1}{\sqrt[4]{1-x}}\frac{1}{\sqrt[4]{(1+x)(1+x^2)}}\sim\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt[4]{1-x}}.$$

由于 $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{1-x}}$ 收敛，故原积分收敛． □

例3 研究积分 $\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x$ 的敛散性.

解 当 $p<1$ 时，$x=0$ 是瑕点；$q<1$ 时，$x=1$ 是瑕点．为了分别考虑函数在这两点附近的情况，把积分拆成两部分：

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x=\int_0^a x^{p-1}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x+\int_a^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x,$$

其中 $a\in(0,1)$．当 $x\to 0$ 时

$$x^{p-1}(1-x)^{q-1}\sim x^{p-1},$$

故当 $p>0$ 时，第一个积分收敛．当 $x\to 1$ 时，

$$x^{p-1}(1-x)^{q-1}\sim(1-x)^{q-1},$$

第二个积分当 $q>0$ 时收敛．因此原积分在 $p>0$，$q>0$ 时收敛． □

这个积分定义了一个以 p，q 为变量的二元函数 $B(p,q)$，称为 Beta 函数．这是将要专门讨论的一个重要的特殊函数．

例4 研究积分 $\int_0^{+\infty} x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ 的敛散性.

解 当 $s<1$ 时，$x=0$ 是瑕点，但它又是无穷积分．和刚才一样，把它拆成两部分来考虑：

$$\int_0^{+\infty} x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=\int_0^1 x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty} x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x.$$

当 $x\to 0$ 时，

$$x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\sim x^{s-1}.$$

所以第一个积分当 $s>0$ 时收敛．当 $x\to+\infty$ 时，

$$x^2\cdot x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\to 0.$$

故对充分大的 x，恒有

$$x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}<\frac{1}{x^2}.$$

所以第二个积分不论 s 为何值时都收敛．因而原积分当 $s>0$ 时收敛． □

这个积分确定了一个以 s 为变量的函数 $\Gamma(s)$，称为 Gamma 函数．这是

另一个要专门讨论的特殊函数.

例 5 设 $p>0$，讨论积分

$$\int_0^1 \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^p}\mathrm{d}x$$

的敛散性.

解 这是一个以 $x=0$ 为瑕点的瑕积分. 作变换 $\frac{1}{x}=t$，即得

$$\int_0^1 \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^p}\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t^{2-p}}\mathrm{d}t, \tag{1}$$

换成无穷积分比较容易处理. 容易看出，当 $p-2\geqslant 0$ 时，积分是发散的. 因为如果(1)收敛，则当 A'，A'' 充分大时必有

$$\left|\int_{A'}^{A''} t^{p-2}\sin t\mathrm{d}t\right| \leqslant 1. \tag{2}$$

现若取 $A'=2k\pi$，$A''=(2k+1)\pi$，那么当 $k\to\infty$ 时

$$\left|\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} t^{p-2}\sin t\mathrm{d}t\right| \geqslant (2k\pi)^{p-2}\int_0^{\pi}\sin t\mathrm{d}t = 2(2k\pi)^{p-2}\geqslant 2,$$

这与(2)显然是矛盾的. 由于

$$|t^{p-2}\sin t|\leqslant\frac{1}{t^{2-p}},$$

故当 $2-p>1$，即 $0<p<1$ 时，(1)绝对收敛. 而当 $2-p>0$，即 $0<p<2$ 时，由于当 $t\to+\infty$ 时 t^{p-2} 单调地趋于 0，故由 Dirichlet 判别法，积分(1)收敛. 用 § 11.2 例 1 的方法知道当 $1\leqslant p<2$ 时，$\int_1^{+\infty}\frac{|\sin t|}{t^{2-p}}\mathrm{d}t$ 发散. 故最后的结论是，当 $0<p<1$ 时，(1)绝对收敛；当 $1\leqslant p<2$ 时，(1)条件收敛；当 $2\leqslant p<\infty$ 时，(1)发散. □

例 6 设 $\alpha>0$，讨论积分

$$I=\int_0^{+\infty}\left[\left(1-\frac{\sin x}{x}\right)^{-\alpha}-1\right]\mathrm{d}x$$

的敛散性.

解 因为当 $x\to 0$ 时，$\frac{\sin x}{x}\to 1$，所以 $x=0$ 是一个瑕点. 为此把积分分成两部分：

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1\left[\left(1-\frac{\sin x}{x}\right)^{-\alpha}-1\right]\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\left[\left(1-\frac{\sin x}{x}\right)^{-\alpha}-1\right]\mathrm{d}x \\ &= I_1+I_2. \end{aligned}$$

显然 I_1 是否收敛，取决于

$$I'_1=\int_0^1\left(1-\frac{\sin x}{x}\right)^{-\alpha}\mathrm{d}x$$

是否收敛. 因为当 $x\to 0$ 时

$$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+O(x^5),$$

所以

$$1-\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{3!}x^2+O(x^4)=\frac{1}{6}x^2(1+O(x^2)).$$

因而当 $x\to 0$ 时,

$$\left(1-\frac{\sin x}{x}\right)^{-\alpha}\sim\left(\frac{1}{6}\right)^{-\alpha}x^{-2\alpha}.$$

故当 $\alpha<\frac{1}{2}$ 时, I'_1 收敛. 由于 $\frac{\sin x}{x}\leqslant 1$, 故 I'_1 绝对收敛. 再看 I_2, 因为 $\left|\frac{\sin x}{x}\right|<1$, 由二项式的展开式得

$$\left(1-\frac{\sin x}{x}\right)^{-\alpha}=1+\alpha\frac{\sin x}{x}+O\left(\frac{1}{x^2}\right),$$

所以

$$\left(1-\frac{\sin x}{x}\right)^{-\alpha}-1=\alpha\frac{\sin x}{x}+O\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

因为积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 条件收敛, $\int_1^{+\infty}O\left(\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$ 绝对收敛, 所以 I_2 条件收敛. 故 I 当 $0<\alpha<\frac{1}{2}$ 时条件收敛. □

最后提一下反常积分主值的概念.

在§7.7中, 我们定义无穷积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 是指两个无穷积分

$$\int_{-\infty}^{a}f(x)\,\mathrm{d}x,\int_{a}^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$$

都收敛, 并且规定

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{a}f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{a}^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x.$$

这就意味着, 当 A, A' 独立地趋于 $+\infty$ 时,

$$\lim_{\substack{A\to+\infty\\A'\to+\infty}}\int_{-A}^{A'}f(x)\,\mathrm{d}x\tag{3}$$

存在. 但对某些函数 f 来说, 极限(3)并不存在, 但当 $A=A'$ 时,

$$\lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A}f(x)\,\mathrm{d}x\tag{4}$$

却是存在的. 例如积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} x\mathrm{d}x$ 便是这种情形. 因为

$$\int_{-A}^{A'} x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(A'^2 - A^2),$$

(3) 这样的极限当然不存在，(4)却是存在的.

如果极限

$$\lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A} f(x)\,\mathrm{d}x$$

存在，称这极限为无穷积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 的 **Cauchy 主值**，记为

$$\mathrm{V.P.}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

例如

$$\mathrm{V.P.}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x = \lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x = 0.$$

对于瑕积分，同样可以定义 Cauchy 主值的概念.

设 c 是 f 在区间 $[a,b]$ 中唯一的瑕点，定义

$$\mathrm{V.P.}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to0}\left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x\right).$$

例如 $\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x}$ 是发散的，但它的 Cauchy 主值存在：

$$\mathrm{V.P.}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x} = \lim_{\varepsilon\to0}\left(\int_{-1}^{-\varepsilon}\frac{\mathrm{d}x}{x} + \int_{\varepsilon}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x}\right) = 0.$$

容易知道，收敛的无穷积分或瑕积分的 Cauchy 主值一定存在，但反之不然.

练习题 11.3

1. 判断下列反常积分的敛散性：

(1) $\int_0^{+\infty}\frac{x^\alpha}{1+x^\beta}\mathrm{d}x, \beta\geqslant 0$；　　(2) $\int_0^{+\infty}\frac{\log(1+x)}{x^\alpha}\mathrm{d}x$；

(3) $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p+x^q}$；　　(4) $\int_0^1\frac{\sqrt{x}}{e^{\sin x}-1}\mathrm{d}x$；

(5) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\log\sin x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$；　　(6) $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p(\log x)^q}$.

2. 判断下列反常积分的绝对收敛性和条件收敛性：

(1) $\int_0^{+\infty} x^p \sin(x^q)\,dx, q \neq 0$;

(2) $\int_0^{+\infty} \frac{x^p \sin x}{1+x^q} dx, q \geqslant 0$.

问题　11.3

1. 判断反常积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^{\alpha}} dx$$

的绝对收敛性和条件收敛性.

2. 设函数 f 在 $(0,1)$ 内单调，在点 $x=0$ 和 $x=1$ 的邻域内不必有界. 如果 $\int_0^1 f(x)dx$ 收敛，那么

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\,dx.$$

3. 上题的逆命题是否成立？即若 f 在 $(0,1)$ 内单调，$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$ 存在，是否能保证 $\int_0^1 f(x)\,dx$ 收敛?请看例子

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{1-x}.$$

4. 利用第 2 题的结果证明，对任意 $\alpha>0$，有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^{\alpha-1}+2^{\alpha-1}+\cdots+n^{\alpha-1}}{n^{\alpha}} = \frac{1}{\alpha}.$$

5. 设 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 中连续，且

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = a,\quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = b$$

都存在. 证明对任意 $\eta>0$ 有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (f(x+\eta)-f(x))\,dx = \eta(a-b).$$

6. 设 $a>0$，$b>0$.

(1) 如果 f 在 $[0,+\infty)$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = f(+\infty)$ 存在，证明

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x} dx = (f(0)-f(+\infty))\log\frac{b}{a};$$

(2) 如果 f 在 $[0,+\infty)$ 上连续，且 $\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx$ 收敛，证明

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x=f(0)\log\frac{b}{a};$$

(3) 如果 f 在 $(0,+\infty)$ 上连续，$f(+\infty)$ 存在，且 $\int_0^1\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$ 收敛，证明

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x=f(+\infty)\log\frac{a}{b}.$$

7. 利用上述结果计算下列积分：

(1) $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\mathrm{d}x, a>0, b>0;$

(2) $\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax-\cos bx}{x}\mathrm{d}x, a>0, b>0.$

第 12 章　Fourier 分析

在第 10 章中，我们详细地讨论了一种特殊的函数项级数——幂级数，它的每一项都是幂函数. 这一章我们要讨论另一种特殊的函数项级数——三角级数：

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx),$$

它的每一项都是三角函数. 讨论这种级数，不仅只是数学上的兴趣，而且有强烈的物理背景，它是工程技术，特别是无线电、通讯、数字处理中一个不可缺少的重要数学工具.

§12.1　周期函数的Fourier 级数

我们知道，在很多科学技术问题中，经常会遇到周期现象，即经历一定的时间 T 后又恢复到原状的现象. T 称为这个周期现象的**周期**. 周期现象都可以用周期函数来描写. 最简单的周期函数就是通常所谓的**简谐波**：

$$x(t) = a\sin(\omega t + \varphi),$$

它的周期是 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$，ω 称为**圆频率**，φ 称为**初相**，a 称为**振幅**.

容易证明，两个频率相同的简谐波叠加的结果仍是一个简谐波，而两个频率不同的简谐波叠加的结果就不再是简谐波了. 例如

$$x_1(t) = \sin t,\quad x_2(t) = \frac{1}{3}\sin 3t,$$

前者的圆频率 $\omega=1$，后者的圆频率 $\omega=3$，它们叠加的结果

$$x_1(t) + x_2(t) = \sin t + \frac{1}{3}\sin 3t$$

是一个较为复杂的周期波.

这个例子说明，把两个频率不同的简谐波叠加起来能产生较为复杂的周期波. 反过来看，一个较为复杂的周期波有可能分解成若干个简谐波的和. 这个事实使人们产生一种想法：能否把一个周期函数分解为一系列频率不同的简谐波的和？即把周期函数 f 表示为

$$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n\sin(n\omega t+\varphi_n),\tag{1}$$

如果能做到这一点，就可大大简化对周期波的研究.

设 $g(t)$是一个以 T 为周期的周期函数，作变量代换

$$x=\frac{2\pi}{T}t\ \text{或}\ t=\frac{T}{2\pi}x,$$

就有

$$g(t)=g\left(\frac{T}{2\pi}x\right)=f(x),$$

那么 f 是以 2π 为周期的函数. 因此，只需讨论以 2π 为周期的周期函数.

设 f 是以 2π 为周期的周期函数，它的圆频率 $\omega=1$，表达式(1)可写为

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n\sin(nx+\varphi_n).\tag{2}$$

若记

$$a_0=2A_0\sin\varphi_0,\quad a_n=A_n\sin\varphi_n,\quad b_n=A_n\cos\varphi_n,\quad n=1,2,\cdots,$$

则(2)又可写为

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx).\tag{3}$$

这样一来，刚才提出的把周期函数分解为一系列简谐波叠加的问题就变成一个纯粹的数学问题：在什么条件下，周期为 2π 的函数能展开成形如(3)的三角级数?

在下面的讨论中，要用到三角函数系

$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\ \cdots,\ \cos nx,\ \sin nx,\ \cdots$

的一个重要性质——**正交性**，即任意两个不同的函数的乘积在区间$[-\pi,\pi]$上的积分为 0. 这通过直接计算就能得到:

$$\int_{-\pi}^{\pi}1\cdot\cos nx\,\mathrm{d}x=0,\int_{-\pi}^{\pi}1\cdot\sin nx\,\mathrm{d}x=0.$$

利用三角公式

$$\cos mx\cos nx=\frac{1}{2}[\cos(m-n)x+\cos(m+n)x],$$

$$\sin mx\sin nx=\frac{1}{2}[\cos(m-n)x-\cos(m+n)x],$$

$$\cos mx\sin nx=\frac{1}{2}[\sin(m+n)x-\sin(m-n)x],$$

又可得到

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx\,\mathrm{d}x=\pi\delta_{mn},$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \mathrm{d}x = \pi\delta_{mn},$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx \mathrm{d}x = 0.$$

现在回到刚才提出的问题，在什么条件下，周期为 2π 的函数 f 能表示成

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \tag{4}$$

暂且假定(4)已成立，并且右端的级数在$[-\pi,\pi]$上一致收敛于 $f(x)$，我们来确定级数中的系数 a_n，b_n. 将(4)两端同乘以 $\cos nx$，并计算它们在$[-\pi,\pi]$上的积分：

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \mathrm{d}x = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \mathrm{d}x$$
$$+ \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos nx \mathrm{d}x + b_k\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos nx \mathrm{d}x\right),$$

根据三角函数系的正交性，右端第三项为 0；右端第一项当 $n=0$ 时等于 πa_0，当 n 为正整数时为 0；右端第二项当 $k=n$ 时等于 πa_n，当 $k\neq n$ 时为 0. 因而有

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \mathrm{d}x = \pi a_n, n = 0,1,2,\cdots.$$

用同样的方法，在(4)两端同乘以 $\sin nx$，并在$[-\pi,\pi]$上积分，即得

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \mathrm{d}x = \pi b_n, n = 1,2,\cdots.$$

于是得到

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \mathrm{d}x, n = 0,1,2,\cdots; \\ b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \mathrm{d}x, n = 1,2,\cdots. \end{cases} \tag{5}$$

从这里可以看出，(4)的常数项写成$\frac{a_0}{2}$，而不写成 a_0，就是为了使 a_n 有一个统一的表达式.

公式(5)把展开式(4)中的系数完全确定下来了，但这是在上面所作的假定下得到的.

现在从另外一个角度来看，假定 f 是一个周期为 2π 的可积或绝对可积的函数(如果 f 是有界函数，就假定它是 Riemann 可积的，简称**可积**；如果 f 是无界函数，就假定它是反常绝对可积的，简称**绝对可积**)，按照公式(5)，可以得出一串系数 a_n，b_n，有了 a_n，b_n，就可以写出相应的三角级数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \tag{6}$$

至于这个级数是否收敛，如果收敛的话，它的和是否就等于 $f(x)$，这些问题都有待进一步研究．但有一点是可以肯定的，这个级数是由 f 所确定的．

定义 12.1 设 f 是周期为 2π 的函数，在 $[-\pi,\pi]$ 上可积或绝对可积．称由公式(5)确定的 a_n，b_n 为 f 的 Fourier 系数，由 a_n，b_n 确定的级数(6)称为 f 的 Fourier 级数，记为

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx).$$

下面将要看到，对于相当广泛的一类函数，它的 Fourier 级数是收敛于它自己的，这正是 Fourier 级数所以重要的原因．

下面看两个 Fourier 级数的例子．

例 1 设 f 是周期为 2π 的函数，且

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [-\pi,\pi); \\ -\pi, & x = \pi. \end{cases}$$

写出它的 Fourier 级数．

解 因为 $x\cos nx$ 是奇函数，所以

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos nx\,\mathrm{d}x = 0, n = 0,1,2,\cdots,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin nx\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin nx\,\mathrm{d}x = (-1)^{n-1}\frac{2}{n}.$$

所以

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2}{n}\sin nx,$$

或者

$$x \sim \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2}{n}\sin nx, x \in [-\pi,\pi). \quad \square$$

例 2 设 f 是周期为 2π 的函数，且

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in (0,2\pi]; \\ 2\pi, & x = 0. \end{cases}$$

写出它的 Fourier 级数．

解 按定义，

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} x\,\mathrm{d}x = 2\pi,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} x\cos nx\,\mathrm{d}x = 0, n = 1,2,\cdots,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} x\sin nx\,\mathrm{d}x = -\frac{2}{n}, n = 1,2,\cdots.$$

所以

$$f(x) \sim \pi - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}\sin nx,$$

或者

$$x \sim \pi - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}\sin nx, x \in (0,2\pi). \quad \square$$

上面两个例子，作为 2π 的周期函数，它们是不一样的(两个例子中函数的图形分别见图 12-1 和图 12-2)，因而它们的 Fourier 级数也不一样.

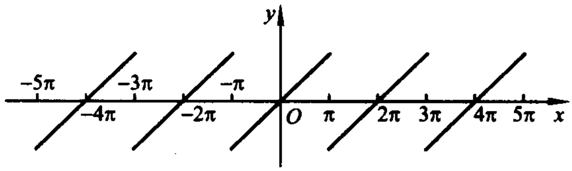


图 12-1

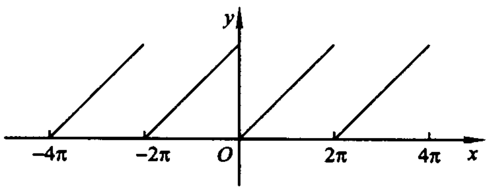


图 12-2

至于能否把 ~ 改成 =，要等学习过 Fourier 级数的收敛定理后，才能作出判断.

不过从这两个例子可以看出一个共同点,它们的 Fourier 系数 a_n, b_n 都满足

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0.$$

这个事实并非偶然，下面的 Riemann-Lebesgue 引理断言，任何可积或绝对可积函数 f 的 Fourier 系数都有此性质.

定理 12.1（Riemann-Lebesgue 引理） 设 f 在 $[a,b]$ 上可积或绝对可积，那么

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\cos\lambda x\mathrm{d}x = 0, \tag{7}$$

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin\lambda x\mathrm{d}x = 0. \tag{8}$$

证明 我们证明(7)成立. 先设 f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积，故必有界，即存在常数 M，使得 $|f(x)| \leqslant M$ 对 $x \in [a,b]$ 成立. 记 $n = [\sqrt{\lambda}]$，则当 $\lambda \to +\infty$ 时，$n \to +\infty$. 现在把区间 $[a,b]$ n 等分，分点为

$$x_i = a + \frac{i}{n}(b-a),\quad i=0,\ 1,\ \cdots,\ n.$$

记 ω_i 为 f 在小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的振幅，那么由于 f 是可积的，所以有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i = 0, \tag{9}$$

这里 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$，注意到

$$\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i}\cos\lambda x\mathrm{d}x\right| = \frac{1}{\lambda}|\sin\lambda x_{i-1} - \sin\lambda x_i| \leqslant \frac{2}{\lambda},$$

$$|\cos\lambda x| \leqslant 1,$$

以及

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\cos\lambda x\mathrm{d}x &= \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\cos\lambda x\mathrm{d}x \\ &= \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}(f(x) - f(x_{i-1}))\cos\lambda x\mathrm{d}x \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\int_{x_{i-1}}^{x_i}\cos\lambda x\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

利用(9)，便有

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)\cos\lambda x\mathrm{d}x\right| &\leqslant \sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i + \frac{2n}{\lambda}M \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i + \frac{2}{\sqrt{\lambda}}M \to 0, \lambda \to +\infty.\end{aligned}$$

再设 f 在 $[a,b]$ 上反常绝对可积. 不妨设 b 是 f 唯一的瑕点，则对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\eta>0$，使得

$$\int_{b-\eta}^{b}|f(x)|\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{2}.$$

由于 f 在 $[a, b-\eta]$ 上 Riemann 可积，由刚才证明的结果知道，存在 $\lambda_0>0$，当 $\lambda>\lambda_0$ 时有

$$\left|\int_a^{b-\eta} f(x)\cos\lambda x\mathrm{d}x\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

于是当 $\lambda>\lambda_0$，便有

$$\left|\int_a^b f(x)\cos\lambda x\mathrm{d}x\right| \leqslant \left|\int_a^{b-\eta} f(x)\cos\lambda x\mathrm{d}x\right| + \int_{b-\eta}^{b}|f(x)|\mathrm{d}x < \varepsilon.$$

这就证明了(7)成立. 用同样的方法可以证明(8)成立. Riemann-Lebesgue 引理证毕. □

由 Riemann-Lebesgue 引理立刻可得：

推论 设$\{a_n\}$，$\{b_n\}$是某个可积或绝对可积函数的 Fourier 系数，那么

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0. \tag{10}$$

由此可见，并不是每个三角级数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

都有资格作为某个可积或绝对可积函数的 Fourier 级数的，它能成为一个 Fourier 级数，条件(10)必须被满足.

利用上面这个推论，还可对 f 的 Fourier 系数趋于 0 的速度作出估计.

定理 12.2 设 f 在$[-\pi,\pi]$上可导，f'可积或绝对可积. 如果 $f(-\pi)=f(\pi)$，那么

$$a_n = o\left(\frac{1}{n}\right),\quad b_n = o\left(\frac{1}{n}\right),\quad n\to\infty.$$

证明 用 a'_n，b'_n 记f'的 Fourier 系数，通过分部积分

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x = -\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin nx\mathrm{d}x = -\frac{1}{n}b'_n,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x = \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos nx\mathrm{d}x = \frac{1}{n}a'_n.$$

因为 $a'_n = o(1)$，$b'_n = o(1)$，所以

$$a_n = o\left(\frac{1}{n}\right),\quad b_n = o\left(\frac{1}{n}\right),\quad n\to\infty. \qquad \square$$

一般地，我们有

定理 12.3 设 f 在$[-\pi,\pi]$上有直到 $k+1$ 阶导数，$f^{(k+1)}$可积或绝对可积，且

$$f(\pi)=f(-\pi),\ f'(\pi)=f'(-\pi),\ \cdots,\ f^{(k)}(\pi)=f^{(k)}(-\pi),$$

那么

$$a_n = o\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right),\quad b_n = o\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right),\quad n\to\infty.$$

证明 用 $a_n^{(l)}$ 和 $b_n^{(l)}$ 记$f^{(l)}$的 Fourier 系数，则由定理 12.2 知道，

$$a_n = -\frac{1}{n}b'_n = -\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}a_n^{(2)}\right) = \cdots = \pm\frac{1}{n^k}b_n^{(k)}\left(\text{或} \pm\frac{1}{n^k}a_n^{(k)}\right),$$

$$b_n = \frac{1}{n}a'_n = \frac{1}{n}\left(-\frac{1}{n}b_n^{(2)}\right) = \cdots = \pm\frac{1}{n^k}a_n^{(k)}\left(\text{或} \pm\frac{1}{n^k}b_n^{(k)}\right).$$

由于 $f^{(k+1)}$可积或绝对可积，所以

$$a_n^{(k)} = o\left(\frac{1}{n}\right),\quad b_n^{(k)} = o\left(\frac{1}{n}\right).$$

由此即得

$$a_n = o\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right),\quad b_n = o\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right). \qquad \square$$

从这个定理可以看出，f 的 Fourier 系数趋于 0 的速度，随着 f 可微性的提高而加快.

练习题 12.1

1. 证明 n 次三角多项式

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n}(\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)$$

的 Fourier 级数就是它自己.

2. 设 f 是周期为 2π 的可积或绝对可积函数，证明：

(1) 如果 f 在 $[-\pi,\pi]$ 中满足 $f(x+\pi)=f(x)$，那么

$$a_{2n-1} = b_{2n-1} = 0;$$

(2) 如果 f 在 $[-\pi,\pi]$ 中满足 $f(x+\pi)=-f(x)$，那么

$$a_{2n} = b_{2n} = 0.$$

3. 设 a_n，b_n 是周期为 2π 的可积或绝对可积函数 f 的 Fourier 系数，证明平移函数 $f(x+h)$ 的 Fourier 系数是

$$\tilde{a}_n = a_n \cos nh + b_n \sin nh,$$

$$\tilde{b}_n = b_n \cos nh - a_n \sin nh.$$

4. 如果级数

$$\frac{|a_0|}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(|a_k| + |b_k|) < +\infty,$$

那么级数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

必为某周期为 2π 的函数的 Fourier 级数.

5. 计算极限 $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\int_0^1 \log x \cos^2 \lambda x \, dx$.

问题 12.1

1. 设 f 是周期为 2π 的可积或绝对可积函数. 证明：

(1) 如果 f 在 $(0,2\pi)$ 中递减，那么 $b_n \geqslant 0$;

(2) 如果 f 在 $(0,2\pi)$ 中递增，那么 $b_n \leqslant 0$.

2. 设 f 是周期为 2π 的 Riemann 可积函数，如果它在 $(-\pi,\pi)$ 中单调，证明

$$a_n = O\left(\frac{1}{n}\right), \quad b_n = O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \to \infty.$$

3. 设 f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积，证明：

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\,|\sin nx|\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x;$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\,|\cos nx|\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

4. 设 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上绝对可积，证明：

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,|\sin nx|\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x;$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,|\cos nx|\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

5. 设 f 在 $[-a,a]$ 上连续可导. 求证

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_{-a}^{a}\frac{1-\cos\lambda x}{x}f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^a \frac{f(x)-f(-x)}{x}\,\mathrm{d}x.$$

§ 12.2 Fourier 级数的收敛定理

现在开始讨论 Fourier 级数的收敛问题，为此先把它的部分和用积分表示出来.

固定 x_0，上节中(6)的部分和为

$$S_n(x_0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx_0 + b_k\sin kx_0),$$

把上节中 a_k，b_k 的表达式(5)代入上式得

$$\begin{aligned} S_n(x_0) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &\quad + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos kx\cos kx_0 + \sin kx\sin kx_0)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos k(x-x_0)\right)\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

利用三角恒等式

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos kx = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}, x \neq 2m\pi, \tag{1}$$

即得

$$S_n(x_0)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(x-x_0)}{2\sin\frac{1}{2}(x-x_0)}\mathrm{d}x.$$

由于被积函数以 2π 为周期，故可把积分区间改为$[x_0-\pi,x_0+\pi]$，再作变量代换 $x-x_0=t$，积分变为

$$S_n(x_0)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t+x_0)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t.$$

把上述积分分为两个积分的和：

$$\int_{-\pi}^{0}+\int_{0}^{\pi},$$

并对前一积分作变量代换 $t=-u$，最后得 $S_n(x_0)$的积分表达式：

$$S_n(x_0)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(f(x_0+t)+f(x_0-t))\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t. \tag{2}$$

这个重要的积分称为 Dirichlet 积分，是讨论 Fourier 级数收敛问题的出发点．函数

$$\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}$$

称为 Dirichlet 核．

这样一来，Fourier 级数的收敛问题，就变为研究含有参变量 n 的积分(2)当 $n\to\infty$ 时是否有极限的问题．不难看出，上节证明的 Riemann-Lebesgue 引理在这个问题的讨论中将发挥重要的作用．

让我们对 Dirichlet 积分(2)作进一步的研究．

把积分(2)写成两部分：

$$S_n(x_0)=\frac{1}{\pi}\left(\int_{0}^{\delta}+\int_{\delta}^{\pi}\right), \tag{3}$$

这里 δ 是一个任意小的正数．由于函数

$$\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)}{2\sin\frac{t}{2}}$$

在区间$[\delta,\pi]$中可积或绝对可积，由 Riemann-Lebesgue 引理，(3)右端第二个积分当 $n\to\infty$ 时趋于 0．因此，当 $n\to\infty$ 时，$S_n(x_0)$的极限存在与否，以及收

敛到什么数值，完全取决于(3)右端的第一个积分：

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}(f(x_0+t)+f(x_0-t))\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t,$$

而这个积分的值仅与 f 在 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 中的值有关．这样，我们就得到了下面所谓的 Fourier 级数的**局部化定理**：

定理 12.4 设 f 是周期为 2π 的函数，它在 $[-\pi,\pi]$ 上可积或绝对可积．那么 f 的 Fourier 级数在点 x_0 是否收敛，以及收敛到什么数值，仅与 f 在 x_0 点附近的行为有关．

由此可见，如果两个函数 f 和 g 在 x_0 点的充分小邻域中有相同的值，则不论它们在这邻域之外的值如何，它们的 Fourier 级数在 x_0 处同时敛散，而且当收敛时有相同的和．考虑到 f 的 Fourier 系数 a_n，b_n 是由 f 在整个区间 $[-\pi,\pi]$ 上的数值确定的，上述这个结论是出乎意料的．

现在利用 Riemann-Lebesgue 引理给出 f 的 Fourier 级数收敛的充分条件．

定理 12.5（Dini 判别法） 设 f 是周期为 2π 且在 $[-\pi,\pi]$ 上可积或绝对可积的函数．对某个实数 s，命

$$\varphi(t)=f(x_0+t)+f(x_0-t)-2s,$$

如果存在 $\delta>0$，使得函数 $\frac{\varphi(t)}{t}$ 在 $[0,\delta]$ 上可积或绝对可积，那么 f 的 Fourier 级数在 x_0 处收敛于 s．

证明 因为常值函数 1 的 Fourier 级数当然是它自己，所以在等式(2)中命 $f=1$ 就得到

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t=1.$$

这个等式也可直接利用(1)得到．于是对任意的 s，便有

$$\begin{aligned}S_n(x_0)-s&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(f(x_0+t)+f(x_0-t)-2s)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\varphi(t)}{2\sin\frac{t}{2}}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\mathrm{d}t.\end{aligned}\tag{4}$$

因为当 $t\to0$ 时，$2\sin\frac{t}{2}\sim t$，由假定，$\frac{\varphi(t)}{t}$ 在 $[0,\delta]$ 上可积或绝对可积，所以 $\frac{\varphi(t)}{2\sin\frac{t}{2}}$ 也在 $[0,\delta]$ 上可积或绝对可积，因而在 $[0,\pi]$ 上也可积或绝对可积．由

Riemann-Lebesgue 引理，(4)的右端当 $n\to\infty$ 时趋于 0，因而

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x_0) = s. \qquad \square$$

从 Dini 判别法，可以得到下面一些便于应用的判别法.

定义 12.2 设 f 是定义在 x_0 附近的函数，如果存在 $\delta>0$，$L>0$ 和 $\alpha>0$，使得当 $t\in(0,\delta]$ 时有

$$|f(x_0+t)-f(x_0+0)|\leqslant Lt^{\alpha},\quad |f(x_0-t)-f(x_0-0)|\leqslant Lt^{\alpha},$$

就说 f 在 x_0 附近满足 α 阶 Lipschitz 条件.

定理 12.6 设 f 是周期 2π 且在 $[-\pi,\pi]$ 上可积或绝对可积的函数. 如果 f 在 x_0 附近满足 α 阶 Lipschitz 条件，那么 f 的 Fourier 级数在 x_0 处收敛于 $\frac{1}{2}(f(x_0+0)+f(x_0-0))$.

证明 在定理 12.5 中取 $s=\frac{1}{2}(f(x_0+0)+f(x_0-0))$，于是

$$\frac{\varphi(t)}{t}=\frac{f(x_0+t)-f(x_0+0)}{t}+\frac{f(x_0-t)-f(x_0-0)}{t}.$$

因为 f 在 x_0 附近满足 α 阶 Lipschitz 条件，所以

$$\left|\frac{\varphi(t)}{t}\right|\leqslant\frac{2L}{t^{1-\alpha}},\quad 0<t\leqslant\delta.$$

当 $\alpha\geqslant1$ 时，$\frac{\varphi(t)}{t}$ 是有界函数；当 $0<\alpha<1$ 时，$\frac{\varphi(t)}{t}$ 在 $[0,\delta]$ 上绝对可积，所以 Dini 判别法的条件成立. $\square$

定理 12.7 设 f 是周期为 2π 且在 $[-\pi,\pi]$ 上可积或绝对可积的函数. 如果 f 在 x_0 处存在导数 $f'(x_0)$，或是有两个有限的单侧导数：

$$f'_+(x_0)=\lim_{t\to0^+}\frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t},$$

$$f'_-(x_0)=\lim_{t\to0^+}\frac{f(x_0-t)-f(x_0)}{-t},$$

那么 f 的 Fourier 级数在 x_0 处收敛于 $f(x_0)$. 如果 f 在 x_0 处仅有两个有限的广义单侧导数：

$$\lim_{t\to0^+}\frac{f(x_0+t)-f(x_0+0)}{t},\quad \lim_{t\to0^+}\frac{f(x_0-t)-f(x_0-0)}{-t},$$

那么 f 的 Fourier 级数在 x_0 处收敛于 $\frac{1}{2}(f(x_0+0)+f(x_0-0))$.

证明 设 f 在 x_0 处有两个有限的单侧导数，因而存在 $\delta>0$，当 $0<t<\delta$ 时便有

$$|f(x_0+t)-f(x_0)|\leqslant Lt,\quad |f(x_0-t)-f(x_0)|\leqslant Lt.$$

这说明 f 在 x_0 附近满足 1 阶 Lipschitz 条件. 在其他几种情况下也能推出同样

的结论. 因而由定理 12.6 即知 f 的 Fourier 级数收敛于$\frac{1}{2}(f(x_0+0)+f(x_0-0))$.

□

为了把 Fourier 级数收敛的条件说得更明确些，我们引入下面的

定义 12.3　定义在区间$[a,b]$上的函数 f 称为是分段可微的，如果存在$[a,b]$的一个分割

$$a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b,$$

使得按以下方式定义在每个子区间$[t_{i-1},t_i]$上的函数

$$g_i(x)=\begin{cases} f(t_{i-1}+0), & x=t_{i-1}; \\ f(x), & x\in(t_{i-1},t_i), \quad i=1, \cdots, n; \\ f(t_i-0), & x=t_i \end{cases}$$

都是可微的(在两个端点处单侧可微).

根据这个定义，我们有

定理 12.8　周期为 2π 的函数 f 如果在$[-\pi,\pi]$上是分段可微的，那么 f 的 Fourier 级数在每点 x_0 收敛于$\frac{1}{2}(f(x_0+0)+f(x_0-0))$. 特别在 f 的连续点处，它收敛于 $f(x_0)$.

证明　这实际上就是定理 12.7，不过是换一种说法而已. □

由此可见，只要 f 在$[-\pi,\pi]$上有一阶导数，就能把它展开成 Fourier 级数. 从这一点来看，Fourier 级数比幂级数优越得多.

现在让我们回过头来看一下 § 12.1 的两个例子. 这两个例子中的函数显然都是分段可微的. 根据定理 12.8，对例 1 而言有

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2}{n}\sin nx,\ -\pi<x<\pi,$$

或者

$$\frac{x}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n},\ -\pi<x<\pi.$$

在上式中取 $x=\frac{\pi}{2}$，就得到

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots=\frac{\pi}{4}.$$

f 在两个端点不连续，$f(\pi+0)=-\pi$，$f(\pi-0)=\pi$，所以 f 的 Fourier 级数在 $x=\pi$ 处收敛于$\frac{f(\pi+0)+f(\pi-0)}{2}=0$. 同样道理，它在 $x=-\pi$ 处也收敛于 0.

对于例 2 有

$$x = \pi - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}\sin nx,\ 0 < x < 2\pi,$$

或者

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n},\ 0 < x < 2\pi. \tag{5}$$

这正是当年 Abel 举的例子，用以说明连续函数项级数的和可能是不连续的(见 § 10.3).

在区间$(0,2\pi)$的两个端点处，由于$f(0+0)=0$，$f(0-0)=2\pi$，所以f的 Fourier 级数在$x=0$处收敛于$\frac{1}{2}(f(0+0)+f(0-0))=\pi$. 同样，它在$x=2\pi$处也收敛于$\pi$.

从等式(5)出发，不必经过计算，就可得到其他一些有趣的等式. 例如在(5)中把x换成$2x$，便可得

$$\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2nx}{2n},\ 0 < x < \pi.$$

再从(5)中减去这个等式，便有

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1},\ 0 < x < \pi.$$

命$x=\frac{\pi}{2}$，由于$\sin(2n-1)\frac{\pi}{2}=(-1)^{n-1}$，我们再一次得到

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots.$$

再看两个例子.

例 1 把函数

$$f(x) = x^2,\ x \in [-\pi,\pi]$$

展开为 Fourier 级数.

解 把f的定义扩充到整个数轴上，使之成为周期为2π的函数(见图 12-3). 把扩充定义后的函数记为$\tilde{f}$，那么$\tilde{f}$是$(-\infty,+\infty)$上的周期为2π的连续偶函数. 于是

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \mathrm{d}x = \frac{2}{3}\pi^2,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \cos nx \mathrm{d}x = (-1)^n \frac{4}{n^2},\ n = 1,2,\cdots,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin nx \mathrm{d}x = 0,\ n = 1,2,\cdots.$$

由 Dini 判别法即得

$$\tilde{f}(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}\cos nx,$$

限制在区间$[-\pi,\pi]$上有

$$x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2}\cos nx,\quad x\in[-\pi,\pi],$$

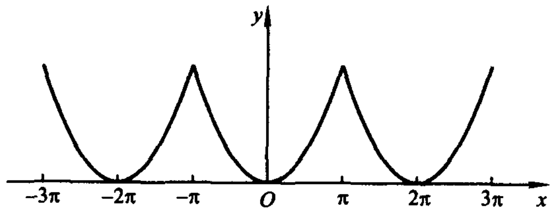


图 12-3

或者

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}=\frac{x^2}{4}-\frac{\pi^2}{12},\quad x\in[-\pi,\pi].\tag{6}$$

在(6)中命 $x=\pi$，就得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6};$$

命 $x=0$，就得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}.\quad \square$$

例 2 把 $f(x)=\cos ax$ 在$[-\pi,\pi]$上展开为 Fourier 级数，其中 a 不是整数.

解 把 f 延拓为整个数轴上的以 2π 为周期的函数，记延拓后的函数为 $\tilde{f}$，那么 $\tilde{f}$ 是$(-\infty,+\infty)$上的周期为 2π 的连续偶函数. 因此

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos ax\cos nx\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\cos(a-n)x+\cos(a+n)x)\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(a-n)\pi}{a-n}+\frac{\sin(a+n)\pi}{a+n}\right]\\&=\frac{(-1)^n}{\pi}\frac{2a\sin a\pi}{a^2-n^2},\quad n=0,1,2,\cdots,\end{aligned}$$

$$b_n=0,\quad n=1,2,\cdots.$$

由 Dini 判别法，即得 $\tilde{f}$ 的 Fourier 展开式为

$$\tilde{f}(x)=\frac{\sin a\pi}{\pi}\left[\frac{1}{a}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2a}{a^2-n^2}\cos nx\right],$$

限制在$[-\pi,\pi]$上就得

$$\cos ax=\frac{\sin a\pi}{\pi}\left[\frac{1}{a}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2a}{a^2-n^2}\cos nx\right]. \quad \square$$

如果在上式中命 $x=0$，可得

$$\frac{\pi}{\sin a\pi}=\frac{1}{a}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2a}{a^2-n^2},\quad a\notin\mathbf{Z}. \tag{7}$$

我们将在 § 20.2 中用这等式来计算一个重要的反常积分.

上面 4 个例子，都是先给出函数在$[-\pi,\pi]$或$[0,2\pi]$上的表达式，然后把它扩充成整个数轴上的周期为 2π 的函数，再把它展开为 Fourier 级数. 对于只在$(0,\pi)$上定义的函数，如何展开成 Fourier 级数？这时在$(-\pi,0)$上可任意补充 f 的定义，使 f 在$(-\pi,\pi)$上有定义，然后再把它以 2π 为周期延拓到整个数轴上去. 对于各种不同的补充，得到的 Fourier 级数自然也是不同的，但在$(0,\pi)$上，它们都收敛到同一个函数.

下面两种补充方法是最常用的.

一种方法是用公式

$$f(x)=f(-x),\quad x\in(-\pi,0)$$

来补充 f 在$(-\pi,0)$上的定义，使 f 在$(-\pi,\pi)$上成为偶函数. 这种补充方法简称为**偶性延拓**. 这样便有

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x,n=0,1,\cdots,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=0,n=1,2,\cdots.$$

因此 f 的 Fourier 级数中只含余弦项：

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx,$$

称它为**余弦级数**.

另一种补充方法是所谓的**奇性延拓**，即用公式

$$f(x)=-f(-x),\quad x\in(-\pi,0)$$

来补充 f 在$(-\pi,0)$上的定义，这时 f 是$(-\pi,\pi)$上的奇函数. 于是

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=0,n=0,1,\cdots,$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x,n=1,2,\cdots.$$

因而 f 的 Fourier 级数是一个**正弦级数**：

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx.$$

由此可见，对于只定义在区间$(0,\pi)$上的函数，只要满足 Dini 定理的条

件，我们既可把它展开成正弦级数，也可把它展开成余弦级数.

例 3　把函数

$$f(x)=x,\ x\in(0,\pi)$$

分别展开成余弦级数和正弦级数.

解　为要展开成余弦级数，先把 f 偶性延拓到区间 $(-\pi,0)$ 上，然后再把它以周期 2π 延拓到整个数轴上，所得的函数记为 $\tilde{f}$（见图 12-4）. 于是

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\mathrm{d}x=\pi,$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]=\begin{cases}0, & n=2k;\\ \dfrac{-4}{(2k+1)^2\pi}, & n=2k+1.\end{cases}$$

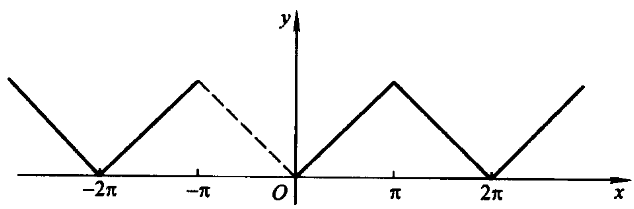


图　12-4

所以

$$\tilde{f}(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}.$$

特别当 $x\in[0,\pi]$ 时有

$$x=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}.$$

在其中命 $x=0$ 得

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}.$$

为要展开成正弦级数，先把 f 奇性延拓到区间 $(-\pi,0)$ 上，然后再把它以周期 2π 延拓到整个数轴上，所得的函数的图形见图 12-5. 这就是 § 12.1 例 1 讨论过的情形，故得

$$x=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n},0\leqslant x<\pi.\quad\square$$

现在讨论 f 的周期为 $2l$ 的情形. 作变换 $x=\dfrac{l}{\pi}t$，并记

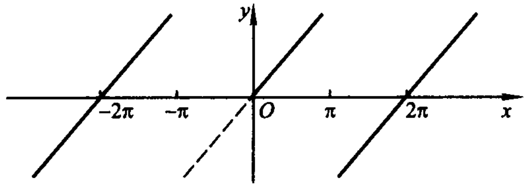


图 12－5

$$f(x)=f\left(\frac{l}{\pi}t\right)=g(t),$$

那么 g 是周期为 2π 的函数．如果 g 满足 Dini 定理的条件，便有

$$g(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt),$$

这里

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(t)\cos nt\mathrm{d}t,n=0,1,2,\cdots,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(t)\sin nt\mathrm{d}t,n=1,2,\cdots.$$

回到原来的变数 x，就有

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right),$$

其中

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x,n=0,1,\cdots,$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x,n=1,2,\cdots.$$

这就是周期为 $2l$ 的函数的 Fourier 展开式．

如果 f 只定义在 $(0,l)$ 上，那么既可把它展开成余弦级数：

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi}{l}x,$$

其中

$$a_n=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x,n=0,1,\cdots;$$

也可把 f 展开成正弦级数：

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi}{l}x,$$

其中

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x, n = 1,2,\cdots.$$

例 4 把

$$f(x)=\begin{cases} x, & x\in\left[0,\ \frac{l}{2}\right];\\ l-x, & x\in\left[\frac{l}{2},\ l\right]\end{cases}$$

在$(0,l)$上展开为正弦级数.

解 把 f 作奇性延拓(见图 12-6)，于是

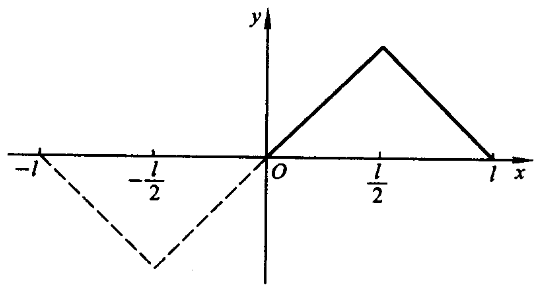


图 12-6

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{2}{l}\int_0^{\frac{l}{2}} x\sin\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x + \frac{2}{l}\int_{\frac{l}{2}}^l (l-x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{4l}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}. \end{aligned}$$

所以

$$b_{2k}=0,\ \ b_{2k+1}=\frac{4l}{\pi^2}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2},\ \ k=0,\ 1,\ \cdots.$$

故得 f 的正弦展开式

$$f(x)=\frac{4l}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\sin\frac{2k+1}{l}\pi x, x\in[0,l].\ \ \square$$

练习题 12.2

1. 把函数

$$f(x)=\operatorname{sgn} x,\ \ x\in(-\pi,\pi)$$

展开为 Fourier 级数，利用这级数求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ 的和.

2. 在区间 $(-\pi,\pi)$ 上把下列函数展开为 Fourier 级数：

(1) $|x|$；　(2) $\sin ax$；　(3) $x\sin x$.

3. 把 $f(x)=x-[x]$ 在 $[0,1]$ 上展开为 Fourier 级数.

4. 在区间 $(-l,l)$ 上把下列函数展开为 Fourier 级数：

(1) x；　(2) $x+|x|$.

5. 把函数

$$f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant 1;\\ 1, & 1<x<2;\\ 3-x, & 2\leqslant x\leqslant 3\end{cases}$$

展开成 Fourier 级数.

6. 证明对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$ 有

$$|\cos x|=\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}\cos 2nx,$$

$$|\sin x|=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}\cos 2nx.$$

7. 对于 $x\in(0,2\pi)$ 以及 $a\neq 0$，求证

$$e^{ax}=\frac{e^{2a\pi}-1}{\pi}\left(\frac{1}{2a}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a\cos kx-k\sin kx}{k^2+a^2}\right).$$

问题　12.2

1. 证明下列等式：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos nx}{n}=\log\left(2\cos\frac{x}{2}\right)$，$-\pi<x<\pi$；

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}=-\log\left(2\sin\frac{x}{2}\right)$，$0<x<2\pi$.

2. 设 f 在 $[a,b]$ 中 Riemann 可积，利用练习题第 6 题的等式，证明

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\,|\cos\lambda x|\,dx=\frac{2}{\pi}\int_a^b f(x)\,dx,$$

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\,|\sin\lambda x|\,dx=\frac{2}{\pi}\int_a^b f(x)\,dx.$$

3. 设 $0<x<2\pi$.

(1) 证明 $\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{k}=-\frac{x}{2}+\int_0^x\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}dt$；

(2) 利用上面的等式证明

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}.$$

4. 设 g 是区间 $[0,h](h>0)$ 上的增函数，证明

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^h g(t)\frac{\sin\lambda t}{t}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}g(0+0).$$

5. 利用 $\cos ax$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的 Fourier 展开式(例 2)证明：

(1) $\cot x=\dfrac{1}{x}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2x}{x^2-n^2\pi^2},x\neq k\pi,k=0,\pm1,\pm2,\cdots$;

(2) $\dfrac{1}{\sin x}=\dfrac{1}{x}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2x}{x^2-n^2\pi^2},x\neq k\pi,k=0,\pm1,\pm2,\cdots$.

§12.3 Fourier 级数的Cesàro 求和

Dini 的收敛判别法告诉我们，要使 f 的 Fourier 级数在 x_0 处收敛于 $f(x_0)$，除了要求 f 在 x_0 处连续外，还要求 f 在 x_0 处有一阶导数，或有左右导数. 这就自然产生这样的问题：仅有 f 的连续性，是否能保证它的 Fourier 级数收敛于自己？1876 年，Du Bois-Reymond 举出了一个连续函数，它的 Fourier 级数在若干点是发散的. 从而否定地回答了刚才的问题.

另一方面，人们并不在连续函数上加条件，而去改进级数收敛的定义，使得在新的收敛意义下，连续函数的 Fourier 级数能收敛于自己.

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 是一个无穷级数，$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$ 为它的部分和. 我们曾经定义：如果 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=s$，就说级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 是收敛的，s 是它的和. 这个定义很自然，和人们的直观认识是一致的. 它的不足之处是一些很简单的级数，在上述意义下却没有和. 例如级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}=1-1+1-1+\cdots \tag{1}$$

就是这样.

新给出的收敛定义，必须使得在原来意义下收敛的级数，在新的意义下仍然收敛，而且有相同的和；而一些在原来的意义下发散的级数，在新的意义下却是收敛的. 换句话说，新的定义必须比原来的定义能使更多的级数有和. 下面介绍的 Cesàro 求和法就能满足这种要求.

定义 12.4　设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是一个无穷级数，$\{S_n\}$ 是它的部分和数列. 如果 $\{S_n\}$ 的算术平均

$$\sigma_n = \frac{S_1 + \cdots + S_n}{n}, \quad n = 1, 2, \cdots$$

是一个收敛数列，即 $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma$，就称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **在 Cesàro 意义下收敛**(**或均值意义下收敛**)，σ 就称为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的 **Cesàro 和**，记为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sigma(C)$，这时称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **可以 Cesàro 求和**.

容易看出，如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 在原来的意义下收敛于 s，即 $\lim_{n\to\infty} S_n = s$，那么 $\{S_n\}$ 的算术平均序列

$$\sigma_n = \frac{S_1 + \cdots + S_n}{n}$$

也以 s 为极限，即 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 在 Cesàro 意义下也收敛，而且有相同的和 s. 另一方面，的确有这样的级数，它在 Cesàro 意义下收敛，而在原来的意义下是发散的. 例如刚才提到的级数(1)，它的部分和数列 $\{S_n\}$ 是

$$S_1 = 1, \ S_2 = 0, \ S_3 = 1, \ S_4 = 0, \ \cdots,$$

因而在原来的意义下是发散的. 但是

$$\sigma_{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}, \quad \sigma_{2n+1} = \frac{n+1}{2n+1} \to \frac{1}{2}, \quad n \to \infty,$$

因而有

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} = \frac{1}{2}(C).$$

现在把 Cesàro 求和法用到 Fourier 级数上去. 我们证明，连续函数 f 的 Fourier 级数在 Cesàro 意义下一定收敛于自己.

现设

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

它的部分和

$$S_n(x_0) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (f(x_0 + t) + f(x_0 - t)) \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}} \mathrm{d}t,$$

因而它的算术平均

$$\begin{aligned}\sigma_n(x_0) &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k(x_0)\\ &= \frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}(f(x_0+t)+f(x_0-t))\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2n\pi}\int_0^{\pi}(f(x_0+t)+f(x_0-t))\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2\mathrm{d}t. \qquad (2)\end{aligned}$$

这里我们用了三角恒等式

$$\sum_{k=0}^{n-1}\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t = \frac{\sin^2\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}.$$

(2)对任何可积或绝对可积的 f 都成立. 特别地，取 $f=1$，这时 $S_n(x_0)=1$，所以 $\sigma_n(x_0)=1$，代入(2)得

$$\frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2\mathrm{d}t = 1. \qquad (3)$$

现在证明

定理 12.9 (Fejér) 设 f 是周期为 2π 且在 $[-\pi,\pi]$ 上可积或绝对可积的函数，如果 f 在 x_0 处有左、右极限 $f(x_0-0)$ 和 $f(x_0+0)$，那么它的 Fourier 级数在 x_0 处的 Cesàro 和为

$$\frac{1}{2}(f(x_0+0)+f(x_0-0)).$$

特别地，当 f 在 x_0 处连续时，它的 Fourier 级数的 Cesàro 和即为 $f(x_0)$.

证明 记 $s=\frac{1}{2}(f(x_0+0)+f(x_0-0))$，我们要证明

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n(x_0)=s.$$

根据(2)和(3)可得

$$\begin{aligned}\sigma_n(x_0)-s &= \frac{1}{2n\pi}\int_0^{\pi}(f(x_0+t)+f(x_0-t)-2s)\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2n\pi}\int_0^{\pi}\varphi(t)\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2\mathrm{d}t, \qquad (4)\end{aligned}$$

这里

$$\varphi(t)=f(x_0+t)+f(x_0-t)-2s.$$

由于左、右极限 $f(x_0-0)$ 和 $f(x_0+0)$ 都存在，故对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta\in(0,\pi)$，当 $0<t<\delta$ 时，

$$|f(x_0+t)-f(x_0+0)|<\frac{\varepsilon}{2},\quad |f(x_0-t)-f(x_0-0)|<\frac{\varepsilon}{2},$$

即 $|\varphi(t)|<\varepsilon$. 把(4)写成两个积分：

$$\sigma_n(x_0)-s=\frac{1}{2n\pi}\left(\int_0^\delta+\int_\delta^\pi\right)=I_1+I_2.$$

分别估计这两个积分得

$$\begin{aligned}|I_1|&\leqslant\frac{1}{2n\pi}\int_0^\delta|\varphi(t)|\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2\mathrm{d}t\\&<\frac{\varepsilon}{2n\pi}\int_0^\delta\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2\mathrm{d}t\\&<\frac{\varepsilon}{2n\pi}\int_0^\pi\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2\mathrm{d}t=\frac{\varepsilon}{2},\\|I_2|&\leqslant\frac{1}{2n\pi}\int_\delta^\pi|\varphi(t)|\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2\mathrm{d}t\\&\leqslant\frac{1}{2n\pi\sin^2\frac{\delta}{2}}\int_0^\pi|\varphi(t)|\,\mathrm{d}t=\frac{A}{n},\end{aligned}$$

其中 $A=\left(2\pi\sin^2\frac{\delta}{2}\right)^{-1}\int_0^\pi|\varphi(t)|\,\mathrm{d}t$ 是一个常数. 故当 $n>\frac{2A}{\varepsilon}$时，

$$|\sigma_n(x_0)-s|\leqslant|I_1|+|I_2|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

这就是要证明的. □

从这定理立刻可得：

推论 设 f 是周期为 2π 且在 $[-\pi,\pi]$ 上可积或绝对可积的函数. 如果 f 在 x_0 处有左、右极限，且其 Fourier 级数在 x_0 处收敛，那么必收敛于 $\frac{1}{2}(f(x_0+0)+f(x_0-0))$.

证明 设 f 的 Fourier 级数在 x_0 处收敛于 s，则其 Cesàro 和也必为 s. 由

定理 12.9 知道，其 Cesàro 和为$\frac{1}{2}(f(x_0+0)+f(x_0-0))$，故得

$$s=\frac{1}{2}(f(x_0+0)+f(x_0-0)). \quad \square$$

这个推论断言，如果 f 的 Fourier 级数在某点 x_0 处收敛，且 $f(x_0+0)$和 $f(x_0-0)$存在，那么必收敛于$\frac{1}{2}(f(x_0+0)+f(x_0-0))$，而不会收敛于其他值. 这是 Fourier 级数和 Taylor 级数的又一个不同之处.

如果 f 是周期为 2π 的连续函数，则有下述更强的结果.

定理 12.10 (Fejér) 如果 f 是周期为 2π 的连续函数，那么它的 Fourier 级数在 Cesàro 意义下一致收敛于 f.

证明 根据定理 12.9 中的推导有

$$\sigma_n(x)-f(x)=\frac{1}{2n\pi}\int_0^{\pi}\varphi_x(t)\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2\mathrm{d}t, \tag{5}$$

其中 $\varphi_x(t)=f(x+t)+f(x-t)-2f(x)$.

由于 f 是整个数轴上的连续函数，故在闭区间$[-2\pi,2\pi]$上一致连续. 对于给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta\in(0,\pi)$，当 $0\leqslant t<\delta$ 时，不等式

$$|f(x+t)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2},\quad |f(x-t)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

对$[-\pi,\pi]$中所有 x 成立. 因而$|\varphi_x(t)|<\varepsilon$ 对$[-\pi,\pi]$中所有 x 成立. 和定理 12.9 的证明一样，把(5)拆成两个积分：

$$\sigma_n(x)-f(x)=\frac{1}{2n\pi}\left(\int_0^{\delta}+\int_{\delta}^{\pi}\right)=I_1+I_2.$$

易知

$$|I_1|\leqslant\frac{\varepsilon}{2n\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2\mathrm{d}t=\frac{\varepsilon}{2}.$$

估计 I_2 时，注意到 f 是$[-2\pi,2\pi]$上的连续函数，它在$[-2\pi,2\pi]$中绝对值的上界设为 M. 于是当 $x\in[-\pi,\pi]$，$t\in[0,\pi]$时，

$$|\varphi_x(t)|\leqslant|f(x+t)|+|f(x-t)|+2|f(x)|\leqslant 4M,$$

因而

$$|I_2|\leqslant\frac{1}{2n\pi}\int_{\delta}^{\pi}|\varphi_x(t)|\frac{\mathrm{d}t}{\sin^2\frac{t}{2}}\leqslant\frac{2M}{n\sin^2\frac{\delta}{2}}.$$

所以当 $n>\dfrac{4M}{\varepsilon\sin^2\frac{\delta}{2}}$时，

$$|\sigma_n(x)-f(x)|\leqslant|I_1|+|I_2|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

对$[-\pi,\pi]$中所有的 x 成立. 由周期性，上式对$(-\infty,+\infty)$中所有 x 成立. □

作为 Fejér 定理的一个重要应用，我们来研究用三角多项式逼近周期为 2π 的连续函数的问题.

称

$$T_n(x)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx)$$

为 n 次三角多项式. Fourier 级数的部分和就是一个三角多项式.

§ 10.6 曾经讲过，闭区间$[a,b]$上的连续函数不一定能展开成幂级数，但能用多项式序列一致逼近. 同样，闭区间$[-\pi,\pi]$上的连续函数不一定能展开成 Fourier 级数，那么能不能用三角多项式来一致逼近呢? 答案是肯定的.

定理 12.11（Weierstrass） 如果 f 在$[-\pi,\pi]$上连续，且 $f(-\pi)=f(\pi)$，那么 f 必能用三角多项式一致逼近.

证明 根据假定，我们能把 f 延拓成整个数轴上的以 2π 为周期的连续函数. 于是由 Fejér 定理知道，f 能在$(-\infty,+\infty)$中用序列$\{\sigma_n(x)\}$一致逼近. 因为 f 的 Fourier 级数的 k 次部分和 $S_k(x)$是一个 k 次三角多项式，因而

$$\sigma_n(x)=\frac{1}{n}(S_0(x)+\cdots+S_{n-1}(x))$$

是一个 $n-1$ 次三角多项式，它就是一个一致逼近 f 的三角多项式序列. □

上面这个证明虽然简单，但却是一个构造性的证明，因为它给出了用来一致逼近 f 的三角多项式 σ_n，它就是 f 的 Fourier 级数部分和的算术平均.

练习题 12.3

1. 求下列级数的 Cesàro 和：

   (1) $1+0-1+1+0-1+\cdots$;

   (2) $\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx+\cdots$, $0<x<2\pi$;

   (3) $\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\cdots$, $0<x<2\pi$.

2. 证明$[0,\pi]$上的连续函数可用余弦多项式一致逼近.

问题 12.3

1. 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 可以 Cesàro 求和的必要条件是

$$a_n = o(n).$$

2. 设由无穷级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 产生的幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 1. 如果

$$\lim_{x \to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = s,$$

就称级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ **在 Abel 意义下收敛**，s 称为级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 的 **Abel 和**，记为 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s(A)$. 这时称 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ **可以 Abel 求和**.

(1) 证明：如果级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 在原来的意义下收敛于 s，那么必有

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s(A);$$

(2) 证明 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = \frac{1}{2}(A)$.

3. 证明：如果 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s(C)$，那么必有 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s(A)$.

4. 证明级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) = \frac{1}{4}(A)$，但它不能 Cesàro 求和.

5. 证明 $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \log n = \frac{1}{2} \log \frac{\pi}{2}(C)$.

6. 设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$，$\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ 是两个收敛级数，其和分别为 A 和 B，证明它们的 Cauchy 乘积 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ 必能 Abel 求和，而且

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = AB(A).$$

7. 试由 Weierstrass 的关于三角多项式的逼近定理导出关于代数多项式的逼近定理.

§ 12.4 平方平均逼近

前面已经证明，周期为 2π 的连续函数能用三角多项式一致逼近．对一般的可积函数，这个结论不再成立．问题出在哪里呢？所谓一致逼近，是指

$$\sup_{-\pi\leqslant x\leqslant\pi}|f(x)-T_n(x)|\to 0,\quad n\to\infty.$$

这就要求 f 与 T_n 之差在整个区间 $[-\pi,\pi]$ 上均匀地趋于 0，而不允许有某些点例外．由于连续函数在邻近点处的值相差很小，这点能办到，而对一般的可积函数就做不到了．在这种情况下，我们只能放弃一致逼近，退而求其次，要求能用三角多项式 T_n 平均地逼近 f，也即要求

$$\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-T_n(x))^2\,\mathrm{d}x\to 0,\quad n\to\infty.$$

这时我们要求对 f 增加一些条件，如果 f 是 $[-\pi,\pi]$ 上的有界函数，我们假定它是 Riemann 可积的，因而 f^2 也是 Riemann 可积的；如果 f 是 $[-\pi,\pi]$ 上的无界函数，我们假定 f^2 是反常可积的，从不等式

$$|f|\leqslant\frac{1}{2}(1+|f|^2)$$

知道，f 是反常绝对可积的，因而反常可积．把 $[-\pi,\pi]$ 上这种函数的全体记为 $\mathbf{R}[-\pi,\pi]$．

现在给出下面的

定义 12.5 设 $f\in\mathbf{R}[-\pi,\pi]$，如果存在三角多项式序列 $\{T_n\}$，使得

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-T_n(x))^2\mathrm{d}x=0,$$

就说 $\{T_n\}$ **平方平均收敛于** f，或者说 f 可用三角多项式**平方平均逼近**．

那么，对于 $\mathbf{R}[-\pi,\pi]$ 中的 f，是否存在平方平均收敛于 f 的三角多项式序列 $\{T_n\}$ 呢？

回答是肯定的．证明这个结论的关键是 Fourier 级数部分和 $S_n(x)$ 的一个极值性质．下面先对一般正交系的 Fourier 级数证明这个性质，然后把它用到三角函数系的 Fourier 级数上去．

我们把 $[a,b]$ 上所有既可积又平方可积的函数的全体记为 $\mathbf{R}[a,b]$．在 $\mathbf{R}[a,b]$ 中按照通常函数的加法和乘以实数的运算引进加法与数乘运算，$\mathbf{R}[a,b]$ 成为一个线性空间．对于任意的 f，$g\in\mathbf{R}[a,b]$，称积分

$$\langle f,g\rangle=\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

为 f 和 g 的**内积**．内积有以下的简单性质：

1° $\langle f,g\rangle=\langle g,f\rangle$对任意 f，$g\in\mathbf{R}[a,b]$成立；

2° 对任意实数 α_1，α_2 及 f_1，f_2，$g\in\mathbf{R}[a,b]$，有

$$\langle\alpha_1 f_1+\alpha_2 f_2,g\rangle=\alpha_1\langle f_1,g\rangle+\alpha_2\langle f_2,g\rangle;$$

3° 对任意 $f\in\mathbf{R}[a,b]$，$\langle f,f\rangle\geqslant 0$.

称

$$\|f\|=\sqrt{\langle f,f\rangle}=\left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$$

为 f 的**范数**.

如果 f，$g\in\mathbf{R}[a,b]$满足条件

$$\langle f,g\rangle=\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=0,$$

我们就说 f 和 g **是正交的**.

设$\{\varphi_0,\varphi_1,\cdots,\varphi_n,\cdots\}$是 $\mathbf{R}[a,b]$中的一个函数系，如果它们满足

$$\langle\varphi_k,\varphi_l\rangle=\int_a^b\varphi_k(x)\varphi_l(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & k\neq l;\\ \lambda_k>0, & k=l,\end{cases}$$

就说$\{\varphi_k\}$是 $\mathbf{R}[a,b]$中的一个**正交系**. 如果还有

$$\lambda_k=1,\quad k=0,\ 1,\ \cdots,$$

就说这个函数系是**规范正交的**.

例如函数系

$$\{1,\cos x,\sin x,\cdots,\cos nx,\sin nx,\cdots\}$$

是$[-\pi,\pi]$上的正交系；而

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}},\ \cdots,\ \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}},\ \cdots\right\}\tag{1}$$

是$[-\pi,\pi]$上的规范正交系.

设$\{\varphi_k\}$是 $\mathbf{R}[a,b]$中一个给定的规范正交系. 对于任意 $f\in\mathbf{R}[a,b]$，称

$$c_k=\langle f,\varphi_k\rangle=\int_a^b f(x)\varphi_k(x)\mathrm{d}x,\quad k=0,\ 1,\ \cdots\tag{2}$$

为 f 关于正交系$\{\varphi_k\}$的 **Fourier 系数**，由此产生的级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}c_k\varphi_k(x)$称为 f 关于正交系$\{\varphi_k\}$的 **Fourier 级数**，记为

$$f(x)\sim\sum_{k=0}^{\infty}c_k\varphi_k(x).\tag{3}$$

前面讨论的 Fourier 级数只是对特定的规范正交系(1)而言的.

和以前一样，记

$$S_n(x)=\sum_{k=0}^{n}c_k\varphi_k(x)$$

为(3)的部分和．称

$$T_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\varphi_k(x)$$

为 n 次 φ 多项式，其中 α_k 是任意给定的实数．

现在问，对于给定的 f 和正整数 n，怎样的 φ 多项式 T_n 使范数

$$\|f-T_n\|=\left(\int_a^b (f(x)-T_n(x))^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$$

取最小值，即平方平均误差最小？根据内积的性质、$\{\varphi_k\}$ 的规范正交性以及等式(2)有

$$\begin{aligned}\|f-T_n\|^2&=\langle f-T_n,f-T_n\rangle\\&=\left\langle f-\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\varphi_k,\ f-\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\varphi_k\right\rangle\\&=\langle f,f\rangle-\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\langle f,\varphi_k\rangle-\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\langle\varphi_k,f\rangle\\&\quad+\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n}\alpha_k\alpha_l\langle\varphi_k,\varphi_l\rangle\\&=\langle f,f\rangle-2\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\langle f,\varphi_k\rangle+\sum_{k=0}^{n}\alpha_k^2\\&=\|f\|^2-2\sum_{k=0}^{n}\alpha_k c_k+\sum_{k=0}^{n}\alpha_k^2\\&=\|f\|^2-\sum_{k=0}^{n}c_k^2+\sum_{k=0}^{n}(\alpha_k-c_k)^2.\end{aligned}$$

由此看出，当且仅当

$$\alpha_k=c_k,\quad k=0,1,\cdots,n$$

时，$\|f-T_n\|^2$ 才取到最小值

$$\left\|f-\sum_{k=0}^{n}c_k\varphi_k\right\|^2=\|f\|^2-\sum_{k=0}^{n}c_k^2. \tag{4}$$

这就是说，f 关于 $\{\varphi_k\}$ 的 Fourier 级数的 n 次部分和，使得 $\|f-T_n\|$ 取得最小值．这就是前面曾经提到的 Fourier 级数部分和的极值性质．从(4)立刻可得

$$\sum_{k=0}^{n}c_k^2\leqslant\|f\|^2, \tag{5}$$

这里 $\{c_k\}$ 是 f 关于 $\{\varphi_k\}$ 的 Fourier 系数．(5)称为 **Bessel 不等式**．注意到(5)的右边与 n 无关，得出

$$\sum_{k=0}^{\infty}c_k^2<+\infty,$$

因而

$$\lim_{k\to\infty} c_k = 0.$$

我们把上面的结果总结成下面的

定理 12.12 设$f\in\mathbf{R}[a,b]$，$\{\varphi_k\}$是$\mathbf{R}[a,b]$中的一个规范正交系，$\{c_k\}$是f关于$\{\varphi_k\}$的 Fourier 系数．那么

1° 对于任意正整数n及实数α_0，…，α_n有

$$\left\| f-\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\varphi_k \right\| \geqslant \left\| f-\sum_{k=0}^{n}c_k\varphi_k \right\|;$$

2° $$\left\| f-\sum_{k=0}^{n}c_k\varphi_k \right\|^2 = \|f\|^2-\sum_{k=0}^{n}c_k^2;$$

3° $$\sum_{k=0}^{\infty}c_k^2\leqslant\|f\|^2.$$

现在问，对什么样的规范正交系$\{\varphi_k\}$，3°中不等式的等号成立，即

$$\sum_{k=0}^{\infty}c_k^2=\|f\|^2. \tag{6}$$

(6)称为 **Parseval 等式或封闭性方程**．

Parseval 等式(6)有明确的几何意义．我们把规范正交系$\{\varphi_k\}$看作无穷维空间$\mathbf{R}[a,b]$中的一个基，如果$f\in\mathbf{R}[a,b]$能展开成 Fourier 级数，即

$$f(x)=c_0\varphi_0(x)+c_1\varphi_1(x)+\cdots+c_n\varphi_n(x)+\cdots,$$

那么$\{c_0,c_1,\cdots,c_n,\cdots\}$可以看成是向量$f$在这组基下的坐标．于是 Parseval 等式(6)就是无穷维空间中的勾股定理．

定义 12.6 设$\{\varphi_k\}$是$\mathbf{R}[a,b]$中的一个规范正交系，如果对任意$f\in\mathbf{R}[a,b]$，均有 Parseval 等式(6)成立，就称$\{\varphi_k\}$是**完备的**．

从定理 12.12 的 2°和 3°立刻可得

推论 规范正交系$\{\varphi_k\}$是完备的充分必要条件是对任意$f\in\mathbf{R}[a,b]$有

$$\lim_{n\to\infty}\left\| f-\sum_{k=0}^{n}c_k\varphi_k \right\|^2=0,$$

即f可用它的 Fourier 级数的部分和平方平均逼近．

我们将证明三角函数系

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}},\ \cdots,\ \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}},\ \cdots\right\} \tag{7}$$

是完备的．从上面的推论知道，这等价于f可用它的 Fourier 级数的部分和平方平均逼近．这就肯定地回答了本节开头提出的问题．

下面先对三角函数系(7)写出 Parseval 等式．命

$$\varphi_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\quad \varphi_{2k-1}(x)=\frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}},\quad \varphi_{2k}(x)=\frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}},\quad k=1,\ 2,\ \cdots,$$

对于任意 $f\in\mathbf{R}[-\pi,\pi]$,

$$c_0=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\varphi_0(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,\mathrm{d}x=\sqrt{\frac{\pi}{2}}a_0,$$

$$c_{2k-1}=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\varphi_{2k-1}(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\,\mathrm{d}x$$

$$=\sqrt{\pi}a_k,$$

$$c_{2k}=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\varphi_{2k}(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\,\mathrm{d}x=\sqrt{\pi}b_k,$$

这里 a_k, b_k 是 § 12.1 的(5)中定义的 Fourier 系数. 于是

$$\sum_{k=0}^{2n}c_k\varphi_k(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx).$$

这时 Bessel 不等式和 Parseval 等式分别为

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,\mathrm{d}x. \tag{8}$$

现在证明

定理 12.13 设 $f\in\mathbf{R}[-\pi,\pi]$, a_n, b_n 是 f 关于三角函数系的 Fourier 系数, 那么 Parseval 等式(8)成立.

证明 分三步来证明.

1° 设 f 是$[-\pi,\pi]$上的连续函数, 且 $f(-\pi)=f(\pi)$.

根据定理 12.11, 对任意 $\varepsilon>0$, 总能找到 n_0 次三角多项式 $T_{n_0}(x)$, 使得

$$|f(x)-T_{n_0}(x)|<\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{2\pi}}$$

对$[-\pi,\pi]$中的 x 都成立. 于是

$$\|f-T_{n_0}\|^2=\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-T_{n_0}(x))^2\,\mathrm{d}x<\varepsilon.$$

根据 Fourier 级数部分和 S_n 的极值性质, 有

$$\|f-S_{n_0}\|^2\leqslant\|f-T_{n_0}\|^2<\varepsilon.$$

从定理 12.12 的 2°可以看出, $\|f-S_n\|^2$ 随着 n 的增大而递减, 因此, 当 $n>n_0$时, 便有

$$\|f-S_n\|^2\leqslant\|f-S_{n_0}\|^2<\varepsilon.$$

这就证明了 $\lim\limits_{n\to\infty}\|f-S_n\|=0$, 故由定理 12.12 的推论知道 Parseval 等式成立.

2° 设 f 在$[-\pi,\pi]$上 Riemann 可积.

因为 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上 Riemann 可积，故对 $\varepsilon>0$，存在 $[-\pi,\pi]$ 的一个分法

$$-\pi=x_0<x_1<\cdots<x_{m-1}<x_m=\pi,$$

使得

$$\sum_{i=1}^{m}\omega_i\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{4\Omega},$$

其中 $\omega_i=M_i-m_i$ 是 f 在小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上的振幅，$\Omega=M-m$ 是 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上的振幅.

改变 f 在区间端点 $-\pi$ 或 π 的值，使得

$$f(-\pi)=f(\pi),$$

这种改变当然不会影响 f 的 Fourier 系数.

用直线将点 $(x_{i-1},f(x_{i-1}))$ 和点 $(x_i,f(x_i))$ 连结起来，得到区间 $[-\pi,\pi]$ 上的一条折线，设这折线的方程为 $y=g(x)$，它当然是 $[-\pi,\pi]$ 上的连续函数，而且满足 $g(-\pi)=g(\pi)$. 根据 1°中证明的结论，存在三角多项式 $T(x)$，使得

$$\int_{-\pi}^{\pi}(g(x)-T(x))^2\,\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{4}. \tag{9}$$

当 $x\in[x_{i-1},x_i]$ 时，显然有

$$m_i\leqslant f(x)\leqslant M_i,\quad m_i\leqslant g(x)\leqslant M_i,$$

因而

$$|f(x)-g(x)|\leqslant M_i-m_i=\omega_i,\quad x\in[x_{i-1},x_i].$$

于是

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-g(x))^2\mathrm{d}x&=\sum_{i=1}^{m}\int_{x_{i-1}}^{x_i}(f(x)-g(x))^2\mathrm{d}x\\&\leqslant\sum_{i=1}^{m}\omega_i^2\Delta x_i\leqslant\Omega\sum_{i=1}^{m}\omega_i\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{4}.\end{aligned} \tag{10}$$

利用初等不等式 $(a+b)^2\leqslant 2(a^2+b^2)$ 以及(9)和(10)即得

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-T(x))^2\mathrm{d}x&\leqslant 2\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-g(x))^2\mathrm{d}x\\&\quad+2\int_{-\pi}^{\pi}(g(x)-T(x))^2\mathrm{d}x\\&<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

这样，我们找到了三角多项式 $T(x)$，使得

$$\|f-T\|^2<\varepsilon.$$

再用和 1°同样的推理方法，即得

$$\lim_{n\to\infty}\|f-S_n\|=0.$$

因而 Parseval 等式成立.

3° 设 f 在$[-\pi,\pi]$上反常可积.

由于 $f\in\mathbf{R}[-\pi,\pi]$，所以 f^2 也可积. 不妨设 π 是 f 的瑕点. 于是对 $\varepsilon>0$，存在 $\eta>0$，使得

$$\int_{\pi-\eta}^{\pi} f^2(x)\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{4}. \tag{11}$$

作函数

$$f_1(x)=\begin{cases}f(x), & x\in[-\pi,\pi-\eta];\\ 0, & x\in(\pi-\eta,\pi]\end{cases}$$

与

$$f_2(x)=\begin{cases}0, & x\in[-\pi,\pi-\eta];\\ f(x), & x\in(\pi-\eta,\pi].\end{cases}$$

显然有 $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$. 由于 f_1 在$[-\pi,\pi]$上 Riemann 可积，故由 2°证明的结论，存在三角多项式 $T(x)$，使得

$$\int_{-\pi}^{\pi}(f_1(x)-T(x))^2\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{4}. \tag{12}$$

于是由(12)和(11)即得

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-T(x))^2\mathrm{d}x &\leqslant 2\int_{-\pi}^{\pi}(f_1(x)-T(x))^2\mathrm{d}x\\ &\quad+2\int_{-\pi}^{\pi}f_2^2(x)\mathrm{d}x\\ &<\frac{\varepsilon}{2}+2\int_{\pi-\eta}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x\\ &<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

重复上面的讨论，即得

$$\lim_{n\to\infty}\|f-S_n\|=0.$$

故 Parseval 等式在这种情形也成立. □

例 1 在 § 12.2 的例 1 中我们得到等式

$$x^2=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4}{n^2}\cos nx,\quad x\in[-\pi,\pi],$$

并且已经算出 $a_0=\frac{2}{3}\pi^2$，$a_n=(-1)^n\frac{4}{n^2}$，$b_n=0$. 应用 Parseval 等式得

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^4\mathrm{d}x=\frac{2}{9}\pi^4+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{n^4},$$

由此即得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}.$$

若对展开式

$$\frac{x}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n},\quad x\in(-\pi,\pi)$$

用 Parseval 等式，我们重新得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.\qquad\square$$

从 Parseval 等式可以得到下面两个重要推论.

推论 1　如果$[-\pi,\pi]$上的连续函数 f 和三角函数系

$$\{1,\cos x,\sin x,\cdots,\cos nx,\sin nx,\cdots\}$$

中每个函数都正交，那么必有 $f=0$.

证明　根据假定，

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=0,\quad n=0,\ 1,\ \cdots,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x=0,\quad n=1,\ 2,\ \cdots.$$

于是由 Parseval 等式得出 $\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x=0$，再由 f 的连续性即得$f=0$. $\square$

推论 2（唯一性定理）　如果两个连续函数有相同的 Fourier 级数，这两个连续函数必恒等.

证明　设连续函数 f 和 g 有相同的 Fourier 级数，那么 $f-g$ 的 Fourier 系数全为 0，由 Parseval 等式，$f-g=0$，即 $f=g$. $\square$

Parseval 等式还可推广到两个不同的函数.

定理 12.14　设 f，$g\in\mathbf{R}[-\pi,\pi]$，a_n，b_n 和 α_n，β_n 分别是f 和 g 的 Fourier 系数，那么

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x=\frac{a_0\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\alpha_n+b_n\beta_n).\tag{13}$$

证明　写出 $f+g$ 和$f-g$ 的 Parseval 等式：

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)+g(x))^2\,\mathrm{d}x\\&=\frac{(a_0+\alpha_0)^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}((a_n+\alpha_n)^2+(b_n+\beta_n)^2),\\&\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-g(x))^2\,\mathrm{d}x\\&=\frac{(a_0-\alpha_0)^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}((a_n-\alpha_n)^2+(b_n-\beta_n)^2),\end{aligned}$$

两式相减，即得(13). □

作为定理 12.14 的一个应用，我们来证明 Fourier 级数的逐项积分定理.

定理 12.15 设 $f\in\mathbf{R}[-\pi,\pi]$，其 Fourier 级数为

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

那么对包含在$[-\pi,\pi]$中的任意区间$[a,b]$有

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b\frac{a_0}{2}dx+\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\,dx.$$

证明 任取 $g\in\mathbf{R}[-\pi,\pi]$，其 Fourier 级数为

$$g(x)\sim\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n\cos nx+\beta_n\sin nx).$$

把

$$\alpha_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(x)\cos nx\,dx,n=0,1,2,\cdots,$$

$$\beta_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(x)\sin nx\,dx,n=1,2,\cdots$$

代入推广的 Parseval 等式(13)，即得

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}g(x)\,dx$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(x)(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\,dx. \tag{14}$$

上式对任何 $g\in\mathbf{R}[-\pi,\pi]$都成立. 今取

$$g(x)=\begin{cases}1, & x\in[a,b];\\ 0, & x\in[-\pi,a)\cup(b,\pi],\end{cases}$$

(14)就变成

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b\frac{a_0}{2}dx+\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\,dx.$$

这就是要证明的. □

这个定理说明，不论 f 的 Fourier 级数是否收敛，但永远可以逐项积分. 这是 Fourier 级数特有的性质.

练习题 12.4

1. 利用 $f(x)=|x|$在$[-\pi,\pi]$上的 Fourier 展开式和 Parseval 等式，求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^4}$ 之和.

2. 写出函数

$$f(x)=\begin{cases}1, & |x|<\alpha;\\ 0, & \alpha<|x|<\pi\end{cases}$$

的 Parseval 等式，并求级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n\alpha}{n^2},\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 n\alpha}{n^2}$$

的和.

3. 对展开式

$$x=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n},\quad -\pi<x<\pi$$

逐项积分，求函数 x^2，x^3 和 x^4 在区间 $(-\pi,\pi)$ 内的 Fourier 展开式.

4. 设

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\pi-1}{2}x, & 0\leqslant x\leqslant 1;\\ \dfrac{\pi-x}{2}, & 1<x\leqslant\pi,\end{cases}$$

证明

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2}\sin nx,\quad |x|\leqslant\pi.$$

5. 利用上题结果，证明：

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin n}{n}\right)^2=\frac{\pi-1}{2}$；

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n^4}=\frac{(\pi-1)^2}{6}$.

6. 设 a_n，b_n 是 $f\in\mathbf{R}[-\pi,\pi]$ 的 Fourier 系数，证明

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n},\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}$$

收敛.

7. 证明级数 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin nx}{\log n}$ 在不包含 2π 整数倍的区间中一致收敛，但它不是 $\mathbf{R}[-\pi,\pi]$ 中任意一个函数的 Fourier 级数.

问题　12.4

1. 设 f 是周期为 2π 的连续函数，命

$$F(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(x+t)\mathrm{d}t,$$

用 a_n，b_n 和 A_n，B_n 分别记 f 和 F 的 Fourier 系数，证明

$$A_0 = a_0^2,\quad A_n = a_n^2 + b_n^2,\quad B_n = 0.$$

由此推出 f 的 Parseval 等式.

2. 设 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续，且在这区间上有可积或平方可积的导数 f'. 如果 f 满足

$$f(-\pi) = f(\pi),\ \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = 0,$$

证明

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f'(x))^2\,\mathrm{d}x \geqslant \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\mathrm{d}x,$$

等式当且仅当 $f(x) = \alpha\cos x + \beta\sin x$ 时成立.

3. 设 f 在 $[0,1]$ 中连续可导，$f(0) = f(1) = 0$，且 $f\left(\frac{1}{2} - x\right) = -f\left(\frac{1}{2} + x\right)$ 对 $x \in \left[0,\ \frac{1}{2}\right]$ 成立，求证

$$\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{4\pi^2}\int_0^1 (f'(x))^2\,\mathrm{d}x,$$

试讨论等号成立的条件.

4. 试用 Fejér 定理(定理 12.10)证明定理 12.13 的推论 1：如果周期为 2π 的连续函数 f 和三角函数系

$$\{1, \cos x, \sin x, \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots\}$$

中每个函数都正交，那么必有 $f = 0$.

5. 定义在区间 $[0,1]$ 上的函数系

$$\varphi_n(t) = \operatorname{sgn}(\sin(2^n\pi t)),\quad n = 1,\ 2,\ \cdots$$

称为 Rademacher 函数系. 证明 Rademacher 函数系是 $[0,1]$ 上的规范正交系.

§ 12.5　Fourier 积分和 Fourier 变换

前面说过，如果函数 f 在区间 $[-l,l]$ 上满足一定的条件(例如可微)，f 就能在 $[-l,l]$ 上展开为 Fourier 级数：

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x + b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right),$$

其中

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x,\ n = 0, 1, \cdots,$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x, n=1,2,\cdots.$$

如果 f 定义在整个数轴上，在任何有限区间中满足收敛定理的条件，且在 $(-\infty,+\infty)$ 中绝对可积，那么对任何固定的 x 值，总能选取充分大的 l，使得 $l>|x|$. 因此 f 仍能用上式表示，但是对于不同的 x，表达式可能不一样.

为了让 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 中能有一个统一的表达式，必须换一种方法考虑.

设 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 中绝对可积，对任意实数 u，定义

$$a(u)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos ut\mathrm{d}t,$$

$$b(u)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin ut\mathrm{d}t. \tag{1}$$

这两个积分都是绝对收敛的. 仿照 Fourier 级数中的做法，称

$$\int_0^{+\infty}(a(u)\cos ux+b(u)\sin ux)\mathrm{d}u$$

为 f 的 Fourier 积分，记为

$$f(x)\sim\int_0^{+\infty}(a(u)\cos ux+b(u)\sin ux)\mathrm{d}u.$$

和 Fourier 级数的情形一样，右端的积分是否收敛，如果收敛，是否收敛到 $f(x)$ 都是不知道的. 为了研究 Fourier 积分的收敛性，记

$$S(\lambda,x)=\int_0^{\lambda}(a(u)\cos ux+b(u)\sin ux)\mathrm{d}u, \tag{2}$$

它相当于 Fourier 级数的部分和. 为了说明 $S(\lambda,x)$ 是有意义的，我们先证明

定理 12.16 设 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 中绝对可积，那么由(1)定义的 $a(u)$ 和 $b(u)$ 都在 $(-\infty,+\infty)$ 中一致连续.

证明 对于任给的 $\varepsilon>0$，存在 $A>0$，使得

$$\int_{-\infty}^{-A}|f(t)|\mathrm{d}t+\int_A^{+\infty}|f(t)|\mathrm{d}t<\frac{\pi}{4}\varepsilon.$$

因为 $\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 中一致连续，故对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\eta>0$，当 $|x'-x''|<\eta$ 时，有

$$|\cos x'-\cos x''|<\frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-A}^{A}|f(t)|\mathrm{d}t\right)^{-1}.$$

今取 $\delta=\frac{\eta}{A}$，当 $|u'-u''|<\delta$，$t\in[-A,A]$ 时，由于

$$|u't-u''t|<A\delta=\eta,$$

所以

$$|\cos u't-\cos u''t|<\frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-A}^{A}|f(t)|\mathrm{d}t\right)^{-1}.$$

于是当 $|u'-u''|<\delta$ 时，有

$$\begin{aligned}|a(u')-a(u'')| &\leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)||\cos u't-\cos u''t|\mathrm{d}t\\ &\leqslant \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{-A}|f(t)|\mathrm{d}t+\frac{2}{\pi}\int_{A}^{+\infty}|f(t)|\mathrm{d}t\\ &\quad+\frac{1}{\pi}\int_{-A}^{A}|f(t)||\cos u't-\cos u''t|\mathrm{d}t\\ &<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

同理可证 $b(u)$ 也在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续. □

由此可知，$S(\lambda,x)$ 对任意 $\lambda\in(0,+\infty)$ 都是有意义的. 把 $a(u)$，$b(u)$ 的表达式(1)代入(2)，即得

$$S(\lambda,x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\lambda}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos u(x-t)\,\mathrm{d}t\right\}\mathrm{d}u. \tag{3}$$

为了研究 $S(\lambda,x)$ 当 $\lambda\to+\infty$ 时的性态，把 $S(\lambda,x)$ 写成类似于 Fourier 级数中的 Dirichlet 积分那样更为方便.

定理 12.17 设 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上绝对可积，那么对任意 $\lambda>0$，有

$$S(\lambda,x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}(f(x+t)+f(x-t))\frac{\sin\lambda t}{t}\mathrm{d}t. \tag{4}$$

证明 关键是要证明等式

$$\begin{aligned}&\int_0^{\lambda}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos u(x-t)\,\mathrm{d}t\right\}\mathrm{d}u\\ &=\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\int_0^{\lambda}f(t)\cos u(x-t)\,\mathrm{d}u\right\}\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{5}$$

成立. 如果(5)成立，那么由(3)即得

$$\begin{aligned}S(\lambda,x)&=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\left\{\int_0^{\lambda}\cos u(x-t)\,\mathrm{d}u\right\}\mathrm{d}t\\ &=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\frac{\sin\lambda(x-t)}{x-t}\mathrm{d}t\\ &=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}(f(x+t)+f(x-t))\frac{\sin\lambda t}{t}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

根据第 16 章的二重积分的知识知道，对任意正数 A，有等式

$$\begin{aligned}&\int_0^{\lambda}\left\{\int_{-A}^{A}f(t)\cos u(x-t)\,\mathrm{d}t\right\}\mathrm{d}u\\ &=\int_{-A}^{A}\left\{\int_0^{\lambda}f(t)\cos u(x-t)\,\mathrm{d}u\right\}\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{6}$$

因为 $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\mathrm{d}t<+\infty$，故对任意固定的 $\lambda>0$ 和 $\varepsilon>0$，存在 A_0，当 $A>A_0$ 时，有

$$\int_{-\infty}^{-A} |f(t)|\,\mathrm{d}t + \int_{A}^{+\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t < \frac{\varepsilon}{\lambda}.$$

于是当 $A > A_0$ 时，

$$\begin{aligned}&\left|\int_0^{\lambda}\left\{\int_{-A}^{A} f(t)\cos u(x-t)\,\mathrm{d}t\right\}\mathrm{d}u\right.\\&\left.\quad-\int_0^{\lambda}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos u(x-t)\,\mathrm{d}t\right\}\mathrm{d}u\right|\\&\leqslant \int_0^{\lambda}\left\{\int_{-\infty}^{-A} |f(t)|\,\mathrm{d}t + \int_{A}^{+\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t\right\}\mathrm{d}u < \varepsilon.\end{aligned}$$

这就证明了

$$\begin{aligned}&\lim_{A\to+\infty}\int_0^{\lambda}\left\{\int_{-A}^{A} f(t)\cos u(x-t)\,\mathrm{d}t\right\}\mathrm{d}u\\&=\int_0^{\lambda}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos u(x-t)\,\mathrm{d}t\right\}\mathrm{d}u.\end{aligned}\tag{7}$$

在(6)两端让 $A\to+\infty$，由(7)即得(5)．　□

从(4)可以得到 Fourier 积分的局部化定理．

定理 12.18　设 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 中绝对可积，那么 f 的 Fourier 积分在某点 x 是否收敛，以及收敛于什么值，仅与 f 在 x 附近的函数值有关．

证明　对任意 $\varepsilon>0$，存在 $A_0>1$，使得

$$\int_{A_0}^{+\infty} |f(x+t)+f(x-t)|\,\mathrm{d}t<\varepsilon.$$

而当 $t>A_0$ 时，有

$$\left|\frac{\sin\lambda t}{t}\right|\leqslant\frac{1}{t}<\frac{1}{A_0}<1.$$

故对一切 λ 有

$$\left|\int_{A_0}^{+\infty}(f(x+t)+f(x-t))\frac{\sin\lambda t}{t}\mathrm{d}t\right|<\varepsilon.$$

根据 Riemann-Lebesgue 引理，对任意正数 $h<A_0$ 有

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_h^{A_0}(f(x+t)+f(x-t))\frac{\sin\lambda t}{t}\mathrm{d}t=0.$$

因而

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_h^{+\infty}(f(x+t)+f(x-t))\frac{\sin\lambda t}{t}\mathrm{d}t=0.$$

这样，当 $\lambda\to+\infty$ 时，积分(4)是否收敛，以及收敛于什么值，完全取决于积分

$$\frac{1}{\pi}\int_0^h(f(x+t)+f(x-t))\frac{\sin\lambda t}{t}\mathrm{d}t\tag{8}$$

当 $\lambda \to +\infty$ 时的极限情况，因而仅与 f 在 x 附近的值有关．　□

关于积分(8)的收敛情况，在讨论 Fourier 级数的收敛问题时已作过讨论，因而可以得到和 Fourier 级数中完全相同的 Dini 判别法及其推论．这里只叙述 Dini 判别法的一个推论．

定理 12.19　设 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 中绝对可积，且在 x 处有广义的左右导数，那么 f 的 Fourier 积分在 x 处收敛于 $\frac{1}{2}(f(x+0)+f(x-0))$，即

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\mathrm{d}u\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos u(x-t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}(f(x+0)+f(x-0)).$$

如果 f 在 x 处连续，则有

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\mathrm{d}u\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos u(x-t)\,\mathrm{d}t. \tag{9}$$

(9) 称为 f 的 **Fourier 积分公式**．

特别地，若 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 中绝对可积，且在 x 处有有限的导数，那么 Fourier 积分公式(9)成立．

例 1　设

$$f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1;\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$$

试由 f 的 Fourier 积分公式导出等式

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin u\cos ux}{u}\mathrm{d}u=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}, & |x|<1,\\ \dfrac{\pi}{4}, & |x|=1,\\ 0 & |x|>1.\end{cases} \tag{10}$$

证明　因为 f 是偶函数，所以

$$a(u)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}f(t)\cos ut\mathrm{d}t=\frac{2}{\pi}\int_0^1\cos ut\mathrm{d}t=\frac{2}{\pi}\frac{\sin u}{u},$$

$$b(u)=0.$$

故对 f 的连续点 x，有

$$f(x)=\int_0^{+\infty}a(u)\cos ux\mathrm{d}u=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin u\cos ux}{u}\mathrm{d}u.$$

这样就得到

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin u\cos ux}{u}\mathrm{d}u=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}, & |x|<1;\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$$

在 $x=\pm 1$ 处，f 的 Fourier 积分分别收敛于

$$\frac{1}{2}(f(1+0)+f(1-0))=\frac{1}{2}(f(-1+0)+f(-1-0))=\frac{1}{2}.$$

由此即得

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin u\cos ux}{u}\mathrm{d}u=\frac{\pi}{4},x=\pm 1.\quad\square$$

在等式(10)中，取 $x=0$，我们得到

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u=\frac{\pi}{2}.$$

在 Fourier 积分公式

$$f(x)=\int_0^{+\infty}\{a(u)\cos ux+b(u)\sin ux\}\mathrm{d}u,$$

$$a(u)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos ut\mathrm{d}t,$$

$$b(u)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin ut\mathrm{d}t$$

中，如果 f 是偶函数，那么

$$a(u)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}f(t)\cos ut\mathrm{d}t, b(u)=0.$$

这时积分公式可写为

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\cos ux\mathrm{d}u\int_0^{+\infty}f(t)\cos ut\mathrm{d}t. \tag{11}$$

这称为 Fourier **余弦公式**.

如果 f 是奇函数，那么

$$a(u)=0,\quad b(u)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}f(t)\sin ut\mathrm{d}t,$$

积分公式又可写为

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\sin ux\mathrm{d}u\int_0^{+\infty}f(t)\sin ut\mathrm{d}t, \tag{12}$$

这称为 Fourier **正弦公式**.

如果 f 只是定义在 $[0,+\infty)$ 上的绝对可积函数，对它作偶性延拓或奇性延拓，就可分别得到公式(11)或(12).

如果命

$$g(u)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}f(t)\cos ut\mathrm{d}t, \tag{13}$$

那么(11)可写为

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}g(u)\cos xu\mathrm{d}u. \tag{14}$$

在这两个公式中，f 和 g 以完全相同的形式互相表示．我们称 g 为 f 的 Fourier **余弦变换**，(14)是余弦变换的**反变换公式**．

完全一样，称

$$h(u)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} f(t)\sin ut\mathrm{d}t \tag{15}$$

为 f 的 Fourier **正弦变换**，由(12)即得它的反变换公式

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} h(u)\sin ux\mathrm{d}u.$$

例 2 求函数 $f(x)=\mathrm{e}^{-\beta x}(\beta>0, x>0)$的 Fourier 正弦变换和余弦变换．

解 由公式(13)和(15)分别得到余弦变换和正弦变换为

$$g(u)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\beta t}\cos ut\mathrm{d}t=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\beta}{\beta^2+u^2},$$

$$h(u)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\beta t}\sin ut\mathrm{d}t=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{u}{\beta^2+u^2}.$$

分别用反变换公式可得

$$\mathrm{e}^{-\beta x}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\beta}{\beta^2+u^2}\cos xu\mathrm{d}u,$$

$$\mathrm{e}^{-\beta x}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{u}{\beta^2+u^2}\sin xu\mathrm{d}u.$$

这样，我们就得到两个并不容易计算的积分的数值：

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos xu}{\beta^2+u^2}\mathrm{d}u=\frac{\pi}{2\beta}\mathrm{e}^{-\beta x}, x>0, \beta>0;$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{u\sin xu}{\beta^2+u^2}\mathrm{d}u=\frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-\beta x}, x>0, \beta>0. \quad \square$$

例 3 解积分方程

$$\int_0^{+\infty} g(u)\sin xu\mathrm{d}u=f(x),$$

其中

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\pi}{2}\sin x, & 0\leqslant x\leqslant\pi;\\ 0, & \pi<x<+\infty.\end{cases}$$

解 把方程写为

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} g(u)\sin xu\mathrm{d}u=\sqrt{\frac{2}{\pi}}f(x),$$

因此$\sqrt{\frac{2}{\pi}}f(x)$是 g 的 Fourier 正弦变换，利用反变换公式，即得

$$g(u)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}f(x)\sin ux\mathrm{d}x$$
$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\pi}{2}\sin x\sin xu\mathrm{d}x=\frac{\sin\pi u}{1-u^2}. \qquad \square$$

在给出一般的 Fourier 变换概念之前，我们先给出 Fourier 积分公式(9)的复数形式.

由于

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos u(x-t)\mathrm{d}t$$

是 u 的偶函数，故 Fourier 积分公式(9)可以写成更对称的形式

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}u\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos u(x-t)\mathrm{d}t. \tag{16}$$

又因为 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin u(x-t)\mathrm{d}t$ 是 u 的奇函数，所以

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}u\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin u(x-t)\mathrm{d}t=0. \tag{17}$$

将(17)乘以 i 再和(16)相加，即得

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}u\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}u(x-t)}\mathrm{d}t, \tag{18}$$

这就是**复数形式的 Fourier 积分公式**.

现在给出下面的

定义 12.7 设 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上绝对可积，称

$$\hat{f}(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tu}\mathrm{d}t \tag{19}$$

为 f 的 **Fourier 变换**.

这里 u 是实数，$\hat{f}(u)$ 是一个实变数的复函数.

从复数形式的 Fourier 积分公式(18)立刻可得它的**反变换公式**为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(u)\mathrm{e}^{\mathrm{i}ux}\mathrm{d}u. \tag{20}$$

如果把 f 的 Fourier 级数也写成复数形式，那么和这里的 Fourier 变换可以有一个很好的类比.

设

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

把表达式

$$\cos nx=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}),\quad \sin nx=\frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx})$$

代入上式的右端得

$$\begin{aligned}&\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\\&=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n-\mathrm{i}b_n}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}+\frac{a_n+\mathrm{i}b_n}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\right)\\&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx},\end{aligned}$$

这里

$$\begin{aligned}c_0&=\frac{a_0}{2},\\c_n&=\frac{1}{2}(a_n-\mathrm{i}b_n)\\&=\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x-\mathrm{i}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x\right)\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\mathrm{d}x,\\c_{-n}&=\frac{1}{2}(a_n+\mathrm{i}b_n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

如果把 c_n 记为 $\hat{f}(n)$，且设 f 满足收敛定理的条件，那么便有

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{f}(n)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx},\tag{21}$$

其中

$$\hat{f}(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\mathrm{d}x,\quad n=0,\ \pm1,\ \cdots.\tag{22}$$

比较 Fourier 变换(19)和反变换公式(20)，这里的 Fourier 系数公式(22)和 Fourier 展开式(21)便可看成是“离散的 Fourier 变换”和“离散的 Fourier 反变换”.

Fourier 变换是数学物理中一种重要的积分变换，如同对数能把乘法运算变为加法运算，除法运算变为减法运算那样，Fourier 变换能把分析运算变为代数运算，从而使问题得以简化.

定理 12.20 设 $\lim\limits_{t\to\pm\infty}f(t)=0$，那么

$$\hat{f'}(x)=\mathrm{i}x\hat{f}(x).$$

证明 由分部积分法，

$$\begin{aligned}\hat{f'}(x)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f'(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}\Big|_{-\infty}^{+\infty}+\mathrm{i}x\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}\mathrm{d}t\right\}=\mathrm{i}x\hat{f}(x).\quad\square\end{aligned}$$

推论 如果 $\lim\limits_{t\to\pm\infty}f^{(k)}(t)=0$，$k=0,\ 1,\ \cdots,\ n-1$，那么

$$\hat{f^{(n)}}(x)=(\mathrm{i}x)^n\hat{f}(x).$$

这说明，经过 Fourier 变换，对函数的微分运算就转变为用 $\mathrm{i}x$ 相乘，求 n 阶导数就变为乘以 $(\mathrm{i}x)^n$. 这一性质使得解常系数的线性微分方程变得容易了. 例如要解常系数线性微分方程

$$a_nf^{(n)}(t)+a_{n-1}f^{(n-1)}(t)+\cdots+a_1f'(t)+a_0f(t)=g(t),$$

这里 a_n, …, a_0 是给定的常数，g 是已知函数. 对等式两端作 Fourier 变换，利用 Fourier 变换的线性性质和定理 12.20，即得

$$a_n(\mathrm{i}x)^n\hat{f}(x)+a_{n-1}(\mathrm{i}x)^{n-1}\hat{f}(x)+\cdots+a_1\mathrm{i}x\hat{f}(x)+a_0\hat{f}(x)=\hat{g}(x),$$

于是

$$\hat{f}(x)=\frac{\hat{g}(x)}{a_n(\mathrm{i}x)^n+a_{n-1}(\mathrm{i}x)^{n-1}+\cdots+a_1(\mathrm{i}x)+a_0}.$$

右端是已知的，通过 Fourier 反变换即能求得 $f(t)$.

Fourier 变换另一个非常有用的性质，就是将函数的卷积运算转化为乘法运算.

定义 12.8 两个函数 f 与 g 的卷积定义为

$$(f*g)(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t-u)g(u)\mathrm{d}u.$$

定理 12.21 $\widehat{f*g}(x)=\hat{f}(x)\hat{g}(x)$.

证明 根据定义，

$$\begin{aligned}\widehat{f*g}(x)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(t-u)g(u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(g(u)\int_{-\infty}^{+\infty}f(t-u)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{g(u)\int_{-\infty}^{+\infty}f(v)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(u+v)x}\mathrm{d}v\right\}\mathrm{d}u\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}g(u)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ux}\mathrm{d}u\int_{-\infty}^{+\infty}f(v)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}vx}\mathrm{d}v\\&=\hat{f}(x)\hat{g}(x).\quad\square\end{aligned}$$

卷积运算的重要意义在于它描述了一类重要的物理现象——平移不变的线性系统，这类系统的输入 $f(t)$ 与输出 $g(t)$ 可用卷积运算来描述：

$$g(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}h(t-u)f(u)\mathrm{d}u=(h*f)(t),$$

这里 h 是由系统确定的函数. 由定理 12.21 知道，输入 $f(t)$ 与输出 $g(t)$ 的 Fourier 变换 $\hat{f}(x)$ 与 $\hat{g}(x)$ 满足

$$\hat{g}(x)=\hat{h}(x)\hat{f}(x).\tag{23}$$

在通讯理论中常称一个函数的 Fourier 变换为其频谱，因此，对平移不变

的线性系统，其输入与输出的频谱之间的关系式(23)是十分简单的．所以研究$\hat{f}(x)$与$\hat{g}(x)$之间的关系比直接研究$f(t)$与$g(t)$之间的关系来得简单方便．这就是所谓在频率域上考虑问题或频谱分析的方法．但根据 Fourier 变换的定义，$\hat{f}(x)$，$\hat{g}(x)$取决于信号$f(t)$，$g(t)$在实轴$(-\infty,+\infty)$上的整体性质，因此它不能反映出信号在局部时间范围中的特征，而在实际问题中，这却是非常重要的．例如对地震信号，人们关心的是在什么位置出现什么样的反射波．而这正是 Fourier 变换难以弄清的问题．从 20 世纪 80 年代开始发展起来的**小波变换**，一方面继承了 Fourier 变换的许多长处，同时又在一定程度上克服了 Fourier 变换缺乏局部性的弱点，对解决实际问题更为有利．关于小波变换的具体内容，有兴趣的读者可参阅有关的专著．

最后，解一个卷积型积分方程作为本节的结尾．

例 4 设 g，h 是已知函数，求解关于未知函数 f 的积分方程：

$$f(u)=g(u)+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}h(u-t)f(t)\,\mathrm{d}t,\ -\infty<u<+\infty.$$

解 对方程式两端进行 Fourier 变换，

$$\hat{f}(x)=\hat{g}(x)+\hat{h}(x)\hat{f}(x),$$

由此即得

$$\hat{f}(x)=\frac{\hat{g}(x)}{1-\hat{h}(x)},$$

从 $\hat{f}$ 通过 Fourier 反变换即能算出 f． □

练习题 12.5

1．用 Fourier 积分表示下列函数：

(1) $f(x)=\begin{cases}\operatorname{sgn} x, & |x|\leqslant 1;\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$

(2) $f(x)=\begin{cases}\sin x, & |x|\leqslant \pi;\\ 0, & |x|>\pi.\end{cases}$

(3) $f(x)=\mathrm{e}^{-a|x|}$，$a>0$.

2．求下列积分方程的解：

(1) $\int_0^{+\infty}f(t)\sin xt\,\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{-x}$，$x>0$;

(2) $\int_0^{+\infty}f(t)\cos xt\,\mathrm{d}t=\frac{1}{1+x^2}$.

3．证明

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 t}{t^2}\cos 2xt\,\mathrm{d}t=\begin{cases}1-x, & 0\leqslant x\leqslant 1;\\ 0, & x\geqslant 1.\end{cases}$$

4. 求下列函数的 Fourier 反变换：

(1) $F(u)=u\mathrm{e}^{-\beta|u|}$，$\beta>0$；

(2) $F(u)=\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}$.

第 13 章　多变量函数的连续性

本书的前面主要讨论了单变量函数的微分学和积分学.为了讨论的顺利进行,我们首先详细地论述了单变量函数的极限和连续性;所有这些都是以实数理论作为基础,因此第 1 章的内容就是实数.

单变量函数是数量之间的最简单的关系.一个事物的变化和发展通常不止是依赖于一种因素,而是多种因素,要从数量上来反映这种关系,单变量函数就不够用了,我们必须考虑一个量同时依赖于许多其他的量的情形,这就需要多变量函数.本册的主要内容是多变量函数的微分学和积分学,我们也从多变量函数的极限和连续性谈起.为此目的,需要了解所谓任意有限维的 Euclid 空间的基本知识,因为多变量函数正是在 n 维 Euclid 空间(简称为“欧氏空间”)的子集上定义的.

为了今后的方便,我们在这里定义两个集合的“积集”. 设 A, B 是两个集合,我们定义

$$A \times B = \{(a, b): a \in A, b \in B\},$$

并称之为 A 同 B 的**积集**. 一般来说,$A \times B$ 与 $B \times A$ 是不相等的. 我们将 $A \times A$ 简记为 A^2. 例如说,$\mathbf{R}^2 = \mathbf{R} \times \mathbf{R} = \{(x, y): x, y \in \mathbf{R}\}$ 就是平面上的点的全体. $\mathbf{R}^2$ 中的子集 $[0,1]^2$,就是平面坐标系中,以 $(0,0)$,$(1,0)$,$(1,1)$ 和 $(0,1)$ 这四点为顶点的正方形的四边上和内部的点的全体.

集合的积集的概念,可以用很显然的方式推广到有限个集合组成的积集上去. 设 A_1,A_2,…,A_k 为 k 个集合,那么

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k = \{(a_1, a_2, \cdots, a_k): a_i \in A_i, i = 1, 2, \cdots, k\}.$$

我们有简写的记号

$$A^k = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{k \text{ 个}}.$$

§ 13.1　n 维 Euclid 空间

我们定义集合

$$\mathbf{R}^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n): x_i \in \mathbf{R}, i = 1, 2, \cdots, n\}.$$

为简单起见，n 数组$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$用一个黑体小写字母 $\boldsymbol{x}$ 来代替，即

$$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n),$$

称 $\boldsymbol{x}$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中的一个**点**，也称它是一个**向量**；在什么时候用哪个术语得看行文的内容而定. 实数 x_i 称为 $\boldsymbol{x}$ 的第 i 个**分量**，每一个分量都是零的向量记为 $\mathbf{0}$，即

$$\mathbf{0}=(0,0,\cdots,0),$$

称为 $\mathbf{R}^n$ 的**零向量**.

我们可以在 $\mathbf{R}^n$ 中定义向量的加法运算，设

$$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n),\ \boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n),$$

令

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n),$$

称向量 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ 为向量 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 之**和**.

再定义数与向量的倍运算，设 $\lambda\in\mathbf{R}$，而 $\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$，令

$$\lambda\boldsymbol{x}=(\lambda x_1,\lambda x_2,\cdots,\lambda x_n),$$

称向量 $\lambda\boldsymbol{x}$ 是**向量 $\boldsymbol{x}$ 的 λ 倍**.

刚刚定义的这两种运算，称为 $\mathbf{R}^n$ 中的**线性运算**. 容易证明，向量的加法运算满足交换律和结合律，也就是说，对任何 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$，$\boldsymbol{z}\in\mathbf{R}^n$，有

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x},$$
$$\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})=(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}.$$

不难看出$\mathbf{0}+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$.

我们规定

$$-\boldsymbol{x}=(-x_1,-x_2,\cdots,-x_n),$$

称它为向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的**负向量**，由此可知

$$\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{x})=\mathbf{0}.$$

倍运算对向量的加法运算适合分配律，也就是说，对任何 $\lambda\in\mathbf{R}$ 与任何 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^n$ 有

$$\lambda(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=\lambda\boldsymbol{x}+\lambda\boldsymbol{y}.$$

此外，还有对任何 λ，$\mu\in\mathbf{R}$，我们有

$$(\lambda+\mu)\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}+\mu\boldsymbol{x},$$
$$\lambda(\mu\boldsymbol{x})=(\lambda\mu)\boldsymbol{x},$$
$$1\cdot\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$$

等等.

集合 $\mathbf{R}^n$ 带上以上定义的线性运算之后，称为 **n 维向量空间**.

现在，再在 n 维向量空间 $\mathbf{R}^n$ 中引进“内积”，对于任何 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,$

$x_n)$，$\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$，定义

$$\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i,$$

这是一个实数，叫做向量 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 的**内积**.

内积具有以下明显的性质：

1° $\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle \geqslant 0$，其中等号成立当且只当 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$；

2° $\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle = \langle \boldsymbol{y},\boldsymbol{x}\rangle$；

3° $\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}\rangle = \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle + \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{z}\rangle$；

4° 对任何实数 λ，有 $\langle \lambda\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle = \lambda\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle$.

性质 1°与 2°分别称为内积的**正定性**和**对称性**，它们的证明是十分明显的. 如果设 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$，$\boldsymbol{z}=(z_1,z_2,\cdots,z_n)$，那么

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}\rangle &= \sum_{i=1}^{n} x_i(y_i+z_i) = \sum_{i=1}^{n}(x_iy_i+x_iz_i)\\ &= \sum_{i=1}^{n} x_iy_i + \sum_{i=1}^{n} x_iz_i = \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle + \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{z}\rangle,\end{aligned}$$

由此证得了性质 3°，而性质 4°的证明更为简单.

由以上性质可以推知，对于任何 λ，$\mu\in\mathbf{R}$ 及任何 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$，$\boldsymbol{z}\in\mathbf{R}^n$，我们有

$$\langle \lambda\boldsymbol{x}+\mu\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\rangle = \lambda\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{z}\rangle + \mu\langle \boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\rangle.$$

这条性质以及 3°与 4°都称为内积的线性性质.

向量空间 $\mathbf{R}^n$ 定义有内积之后，称为 ***n* 维 Euclid 空间**，简称**欧氏空间**. 采用这个名称是有充分的理由的. 大家知道，在 Euclid 几何中，可以计算点与点之间的距离、线段的长度、向量之间的夹角等等. 我们即将看到在欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 中，同样可以定义这些几何量.

对于任何向量 $\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$，定义

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle},$$

称 $\|\boldsymbol{x}\|$ 为 $\boldsymbol{x}$ 的长度未尝不可，但数学上常常用一个更雅的名词，叫做向量 $\boldsymbol{x}$ 的**范数**. 可以证明，向量的范数具有以下三条性质：

1° $\|\boldsymbol{x}\| \geqslant 0$，式中等号当且只当 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$成立；

2° 对任何 $\lambda\in\mathbf{R}$，$\|\lambda\boldsymbol{x}\| = |\lambda|\,\|\boldsymbol{x}\|$；

3° $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\| \leqslant \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$(三角形不等式).

性质 1°和性质 2°甚为明显，我们只证明性质 3°. 在 n 维空间中，Cauchy-Schwarz 不等式(见 § 7.8)可以通过内积表示为

$$\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle^2 \leqslant \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle\langle \boldsymbol{y},\boldsymbol{y}\rangle, \tag{1}$$

它也等价于

$$|\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle| \leqslant \|\boldsymbol{x}\|\,\|\boldsymbol{y}\|, \tag{2}$$

利用(2)，便可得出

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2&=\langle x+y,x+y\rangle=\langle x,x\rangle+2\langle x,y\rangle+\langle y,y\rangle\\&=\|x\|^2+2\langle x,y\rangle+\|y\|^2\\&\leqslant\|x\|^2+2\|x\|\,\|y\|+\|y\|^2\\&=(\|x\|+\|y\|)^2,\end{aligned}$$

因此 $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$.

如果 x 与 y 都不是零向量，那么由(2)可得

$$\frac{|\langle x,y\rangle|}{\|x\|\,\|y\|}\leqslant 1,$$

这表明，可以找出唯一的 $\theta\in[0,\pi]$ 使得

$$\cos\theta=\frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\,\|y\|},\tag{3}$$

这个 θ 就可定义为两个非零的向量 x 和 y 间的**夹角**，显然 $\langle x,y\rangle=0$ 当且只当 $\theta=\frac{\pi}{2}$，这时我们称向量 x 与向量 y **正交**．零向量 $\mathbf{0}$ 可被认为同任何向量都正交．

范数等于 1 的向量称为**单位向量**．下列 n 个 n 维向量

$$\begin{gathered}e_1=(1,0,0,\cdots,0),\\e_2=(0,1,0,\cdots,0),\\\cdots\cdots\\e_n=(0,0,\cdots,0,1),\end{gathered}$$

都是单位向量，并且任何两个都是正交的，这可以表示为

$$\langle e_i,e_j\rangle=\delta_{ij}=\begin{cases}0, & 若\ i\neq j;\\1, & 若\ i=j.\end{cases}$$

这里 i，$j=1$，2，$\cdots$，n．这 n 个向量叫做**单位坐标向量**．每一个向量

$$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

都可以表示为

$$x=\sum_{i=1}^n x_ie_i.$$

最后，我们定义两点 x 与 y 间的距离为 $\|x-y\|$．很明显，两点之间的距离是一个非负数，只有当这两点重合的时候距离才等于零；距离有对称性：x 与 y 间的距离等于 y 与 x 间的距离．由于

$$x-y=(x-z)+(z-y),$$

由此得知

$$\|x-y\|\leqslant\|x-z\|+\|z-y\|,$$

这就是**距离的三角形不等式**.

从以上的讨论可见，称带有内积的向量空间 $\mathbf{R}^n$（即**内积空间** $\mathbf{R}^n$）为欧氏空间是有根据的. 从此以后，在 $\mathbf{R}^n$ 中用几何来思考就如同在平面上和通常的三维空间中用几何来思考一样，将为我们带来方便.

例如说，如果 $\boldsymbol{a}\in\mathbf{R}^n$，$r>0$，我们把集合

$$\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n:\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|<r\}$$

称为 $\mathbf{R}^n$ 中以 $\boldsymbol{a}$ 为球心，以 r 为半径的**球**，记为 $B_r(\boldsymbol{a})$，而令

$$\overline{B}_r(\boldsymbol{a})=\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n:\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|\leqslant r\},$$

它是 $B_r(\boldsymbol{a})$再带上球面上的所有点，称为**闭球**.

设 $E\subset\mathbf{R}^n$，如果存在 $r>0$ 使得

$$E\subset B_r(\mathbf{0}),$$

那么称 E 是一个**有界集**. 点集 F 是无界集的意思是：对任何 $m\in\mathbf{N}_+$，都存在 $\boldsymbol{x}_m\in F$ 使得 $\|\boldsymbol{x}_m\|>m$.

为了今后的需要，除了向量的范数之外，还需要定义**矩阵的范数**. 设 $m\times n$矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&&\vdots\\a_{m1}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix},$$

我们定义 $\boldsymbol{A}$ 的范数为

$$\|\boldsymbol{A}\|=\Big(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2\Big)^{1/2}.$$

这种定义 $\boldsymbol{A}$ 的范数的方法，实际上就是把矩阵 $\boldsymbol{A}$ 看成 mn 维向量，用这个向量的范数作为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的范数. 因此，向量范数的那些基本性质，对矩阵范数都能成立. 例如说，$\|\boldsymbol{A}\|\geqslant 0$，等号当且只当 $\boldsymbol{A}=\mathbf{0}$时成立. 对任何实数 λ，有

$$\|\lambda\boldsymbol{A}\|=|\lambda|\,\|\boldsymbol{A}\|.$$

如果 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是同型的矩阵，那么 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 有意义，并且

$$\|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\|\leqslant\|\boldsymbol{A}\|+\|\boldsymbol{B}\|.$$

最后，若 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $n\times l$ 矩阵，那么乘积 $\boldsymbol{AB}$ 有意义，并且可以证明

$$\|\boldsymbol{AB}\|\leqslant\|\boldsymbol{A}\|\,\|\boldsymbol{B}\|. \tag{4}$$

事实上，设 $\boldsymbol{A}=(a_{ik})$，$\boldsymbol{B}=(b_{kj})$，那么 $\boldsymbol{AB}$ 的第 i 行、第 j 列上的数是

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj},$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式可知

$$\Big(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}\Big)^2\leqslant\sum_{k=1}^{n}a_{ik}^2\sum_{k=1}^{n}b_{kj}^2.$$

求和之后，得到

$$\begin{aligned}\| AB \|^2 &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{l}\Big(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\Big)^2\\ &\leqslant \Big(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2\Big)\Big(\sum_{j=1}^{l}\sum_{k=1}^{n} b_{kj}^2\Big) = \| A \|^2 \| B \|^2,\end{aligned}$$

开平方之后,得出 $\| AB \| \leqslant \| A \| \ \| B \|$.

练习题 13.1

1. 设 $\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$ 且 $\boldsymbol{x}=(1,1,\cdots,1)$. 求证：$\boldsymbol{x}$ 与各单位坐标向量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{e}_n$ 夹成相等的角.
2. 设 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$ 是欧氏空间中的向量，θ 是这两个向量之间的夹角，试证明“余弦定理”成立：
$$\| \boldsymbol{x}-\boldsymbol{y} \|^2 = \| \boldsymbol{x} \|^2 + \| \boldsymbol{y} \|^2 - 2\| \boldsymbol{x} \| \ \| \boldsymbol{y} \| \cos\theta.$$
3. 设 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$ 是欧氏空间中的两个互相正交的向量，试证明“勾股定理”成立：
$$\| \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \|^2 = \| \boldsymbol{x} \|^2 + \| \boldsymbol{y} \|^2.$$
4. 设 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$ 为欧氏空间中的任意两个向量，证明“平行四边形定理”：
$$\| \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \|^2 + \| \boldsymbol{x}-\boldsymbol{y} \|^2 = 2(\| \boldsymbol{x} \|^2 + \| \boldsymbol{y} \|^2).$$
5. 设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 是欧氏空间中两个不同的点，记 $2r=\| \boldsymbol{a}-\boldsymbol{b} \|>0$. 求证：
$$B_r(\boldsymbol{a})\cap B_r(\boldsymbol{b})=\varnothing.$$
6. 设 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$. 证明：存在常数 K_1，$K_2>0$ 使得对任意的 $\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$，有
$$K_1\sum_{i=1}^{n}|x_i| \leqslant \| \boldsymbol{x} \| \leqslant K_2\sum_{i=1}^{n}|x_i|.$$
7. 证明：存在常数 M_1，$M_2>0$ 使得对任意 $\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$ 有
$$M_1\max\{|x_i|\} \leqslant \| \boldsymbol{x} \| \leqslant M_2\max\{|x_i|\}.$$

§13.2 $\mathbf{R}^n$ 中点列的极限

设 $\boldsymbol{x}_i\in\mathbf{R}^n$，$i=1$，2，$\cdots$，称 $\{\boldsymbol{x}_i\}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个点列.

定义 13.1 设 $\{\boldsymbol{x}_i\}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个点列且 $\boldsymbol{a}\in\mathbf{R}^n$. 如果对任意给定的 $\varepsilon>0$，都存在 $N\in\mathbf{N}_+$，凡是 $i>N$ 时，便有

$$\| \boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{a} \| < \varepsilon,$$

我们称点 $\boldsymbol{a}$ 是点列$\{\boldsymbol{x}_i\}$的**极限**，记作

$$\lim_{i\to\infty} \boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{a} \quad 或 \quad \boldsymbol{x}_i \to \boldsymbol{a}\ (i\to\infty),$$

这时也称点列$\{\boldsymbol{x}_i\}$**收敛**于点 $\boldsymbol{a}$.

点列$\{\boldsymbol{x}_i\}$收敛于 $\boldsymbol{a}$，也可以等价地表述为：对任意给定的 $\varepsilon>0$，都存在正整数 N，凡是 $i>N$ 便有 $\boldsymbol{x}_i \in B_\varepsilon(\boldsymbol{a})$. 更加通俗的几何说法是：不管以点 $\boldsymbol{a}$ 为中心的球是多么小，一定能找到点列的一项，使得在这一项以后的各项都落在这个球内.

与收敛数列一样，容易证明下列两条性质：1° 如果点列$\{\boldsymbol{x}_i\}$收敛，那么它的极限必是唯一的；2° 收敛点列必定是有界的.

定理 13.1 设 $\lim\limits_{i\to\infty} \boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{a}$ 且 $\lim\limits_{i\to\infty} \boldsymbol{y}_i = \boldsymbol{b}$，那么

1° $\lim\limits_{i\to\infty}(\boldsymbol{x}_i \pm \boldsymbol{y}_i) = \boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{b}$;

2° 对于任何 $\lambda \in \mathbf{R}$ 有

$$\lim_{i\to\infty}(\lambda \boldsymbol{x}_i) = \lambda \boldsymbol{a}.$$

证明是显然的，请读者自行完成.

定义 13.2 设$\{\boldsymbol{x}_i\}$是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个点列. 如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbf{N}_+$，凡是 k，$l>N$ 时便有 $\| \boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}_l \| < \varepsilon$，我们称$\{\boldsymbol{x}_i\}$是一个**基本(点)列**.

在实数的情形，基本列与收敛数列是同一回事，我们自然要问：在 $\mathbf{R}^n$ 中是否成立着同样的命题呢？答案是肯定的，在做过一些准备工作之后，我们来证明这一论断.

设$\{\boldsymbol{x}_i\}$是一个点列，并设

$$\boldsymbol{x}_i = (x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \cdots, x_n^{(i)}),\quad i=1,\ 2,\ \cdots,$$

如果对于 $k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$，有

$$\lim_{i\to\infty} x_k^{(i)} = a_k,$$

那么称点列$\{\boldsymbol{x}_i\}$**按分量收敛于** $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$.

点列收敛与按分量收敛有什么关系呢？这可从下面定理中找出答案.

定理 13.2 $\lim\limits_{i\to\infty} \boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{a}$ 必须且只需点列$\{\boldsymbol{x}_i\}$按分量收敛于 $\boldsymbol{a}$.

证明 我们有显然的不等式

$$|x_k^{(i)}| \leqslant \| \boldsymbol{x}_i \| \leqslant |x_1^{(i)}| + |x_2^{(i)}| + \cdots + |x_n^{(i)}|,$$

$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$，而 $i\in\mathbf{N}_+$，由此可知当 $\lim\limits_{i\to\infty} \boldsymbol{x}_i = \mathbf{0}$ 时，$\lim\limits_{i\to\infty} x_k^{(i)} = 0$ $(k=1,2,\cdots,n)$，即$\{\boldsymbol{x}_i\}$按分量收敛于$\mathbf{0}$；反之，若 $\boldsymbol{x}_i$ 按分量收敛于$\mathbf{0}$，得出

$$\lim_{i\to\infty}(|x_1^{(i)}| + |x_2^{(i)}| + \cdots + |x_n^{(i)}|) = 0,$$

由此立即得出$\lim\limits_{i\to\infty}\|\boldsymbol{x}_i\|=0$，也就是$\lim\limits_{i\to\infty}\boldsymbol{x}_i=\boldsymbol{0}$.

对一般的情形(即 $\boldsymbol{a}$ 不一定是 $\boldsymbol{0}$ 的情形)，考虑点列$\{\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{a}\}$，将上述特殊情形所证得的结果用到这个点列上，便得出点列$\{\boldsymbol{x}_i\}$收敛于 $\boldsymbol{a}$ 等价于$\{\boldsymbol{x}_i\}$按分量收敛于 $\boldsymbol{a}$ 的论断. □

例 1 在 $\mathbf{R}^3$ 中考察点列

$$\boldsymbol{x}_i=\left(\left(1+\frac{1}{i}\right)^i,\ \frac{i}{i+1},\ \left(1-\frac{1}{i}\right)^i\right),$$

由于

$$\lim_{i\to\infty}\left(1+\frac{1}{i}\right)^i=\mathrm{e},$$

$$\lim_{i\to\infty}\frac{i}{i+1}=1,$$

$$\lim_{i\to\infty}\left(1-\frac{1}{i}\right)^i=\mathrm{e}^{-1},$$

所以 $\lim\limits_{i\to\infty}\boldsymbol{x}_i=(\mathrm{e},1,\mathrm{e}^{-1})$. □

定理 13.3 $\{\boldsymbol{x}_i\}$为收敛点列的必要充分条件是$\{\boldsymbol{x}_i\}$是基本点列.

证明 1° **必要性**

设点列$\{\boldsymbol{x}_i\}$收敛于 $\boldsymbol{a}$，则对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbf{N}_+$，使得凡是 $i>N$ 时便有 $\|\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{a}\|<\varepsilon/2$，因此当 k，$l>N$ 时，我们同时有

$$\|\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{a}\|<\frac{\varepsilon}{2},\quad \|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{x}_l\|<\frac{\varepsilon}{2},$$

于是，由距离的三角形不等式，有

$$\|\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{x}_l\|\leqslant\|\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{a}\|+\|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{x}_l\|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

这说明$\{\boldsymbol{x}_i\}$是基本点列.

2° **充分性**

现在设$\{\boldsymbol{x}_i\}$是基本点列，由不等式

$$|x_j^{(k)}-x_j^{(l)}|\leqslant\|\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{x}_l\|\quad (j=1,2,\cdots,n)$$

可知，数列$\{x_j^{(i)}\}(j=1,2,\cdots,n)$是基本列，所以它们是收敛数列，我们令

$$\lim_{i\to\infty}x_j^{(i)}=a_j\ (j=1,2,\cdots,n),$$

由此可见点列$\{\boldsymbol{x}_i\}$按分量收敛于 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，由定理 13.2 知，$\{\boldsymbol{x}_i\}$当 $i\to\infty$ 时收敛于 $\boldsymbol{a}$. □

由这个定理的证明看出，由于定理 13.2，一些有关点列的收敛问题，可以转化成数列的相应问题来解决，下面是又一个例子.

定理 13.4 (Bolzano - Weierstrass) 从任一有界的点列中可以选出收敛的子点列.

证明　设$\{\boldsymbol{x}_i\}$是一个有界点列并且其分量组成 n 个数列$\{x_k^{(i)}\}$，$k=1,2,\cdots,n$．由于$\{\boldsymbol{x}_i\}$有界，所以这 n 个数列中的每一个都是有界数列．从数列的 Bolzano－Weierstrass 定理可知，从$\{x_1^{(i)}\}$中可以选出收敛的子列$\{x_1^{(i_1)}\}$，设它收敛于 a_1．接着考察数列$\{x_2^{(i_1)}\}$，它是有界的数列，因此又可选出一个子列$\{x_2^{(i_2)}\}$收敛于一个数 a_2．反复进行这种操作，最后可以选出子数列$\{x_n^{(i_n)}\}$收敛于一个数 a_n．由此可知，

$$\lim_{i_k\to\infty} x_k^{(i_k)} = a_k\ (k=1,2,\cdots,n),$$

依定理 13.2 得知

$$\lim_{i_n\to\infty} \boldsymbol{x}_{i_n} = (a_1,a_2,\cdots,a_n). \qquad \square$$

并不是所有有关数列收敛的定理都可以推广到点列上．例如说，我们有这样的定理："有界的单调数列必有极限"，在点列的情形就无法作出与之相应的定理，这是因为在点列的情形，无法定义一种有用的"序"，从而也就不便用来定义点列的单调性．

练习题　13.2

1．在 $\mathbf{R}^2$ 中定义点列

$$\boldsymbol{x}_n = \left(\frac{1}{n},\ \sqrt[n]{n}\right),\quad n=1,\ 2,\ \cdots,$$

求证：$\lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{x}_n = (0,1)$．

2．证明定理 13.1．

3．证明：欧氏空间中的收敛点列必是有界的．

4．证明：欧氏空间中的基本列必是有界的．

5．设$\{\boldsymbol{x}_k\}$是 n 维欧氏空间中的点列，并且级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|\boldsymbol{x}_{k+1}-\boldsymbol{x}_k\|$ 收敛，求证：$\{\boldsymbol{x}_k\}$为一收敛点列．

§ 13.3　$\mathbf{R}^n$ 中的开集和闭集

在讨论连续函数的时候，我们已经知道，任何在有界闭区间上的连续函数，在这个区间上必有最小值和最大值，并且在这区间上是一致连续的．但

是，在开区间中，连续函数就不一定具备这些性质．这就表明，有界的开区间和有界的闭区间，虽然只有“两点之差”，但对连续函数产生的后果却大不一样．

我们即将看到，对于多变量的连续函数来说，在所谓的“有界闭集”上也有这些性质．为了定义 $\mathbf{R}^n$ 中的闭集，我们从 $\mathbf{R}^n$ 中的开集谈起．

定义 13.3　设 $E\subset\mathbf{R}^n$，如果点 $\boldsymbol{a}\in E$，并且存在 $r>0$ 使得 $B_r(\boldsymbol{a})\subset E$，那么 $\boldsymbol{a}$ 称为 E 的一个**内点**．点集 E 的全体内点之集合记作 E°，称之为 E 的**内部**．如果 $E^\circ=E$，那么称 E 为 $\mathbf{R}^n$ 中的**开集**．

当 E 为空集的时候，这时 E° 也是空集，适合 $E^\circ=E$，所以空集是开集．当然，$\mathbf{R}^n$ 本身也是开集．

由定义可知 $E^\circ\subset E$．

让我们看几个例子．

例 1　$\mathbf{R}^2$ 中的上半平面 $\{(x,y):y>0\}$ 是 $\mathbf{R}^2$ 中的开集．

证明　从上半平面中任取一点 $\boldsymbol{a}=(x,y)$，其中 $y>0$，作“球”（这时实际上是一个圆）$B_y(\boldsymbol{a})$，任取一点 $(x',y')\in B_y(\boldsymbol{a})$，我们有

$$(x'-x)^2+(y'-y)^2<y^2,$$

化简后得出

$$2yy'>(x'-x)^2+(y')^2\geqslant 0,$$

从 $y>0$ 导出 $y'>0$，这表明 (x',y') 仍是上半平面中的点，从而 $\boldsymbol{a}$ 是上半平面的一个内点，所以上半平面是一开集．　□

例 2　将 $\mathbf{R}^n$ 挖去任一个点之后所成的集是 $\mathbf{R}^n$ 中的开集．

证明　设 $\boldsymbol{a}\in\mathbf{R}^n$，考察集合 $E=\mathbf{R}^n\setminus\{\boldsymbol{a}\}$．任取一点 $\boldsymbol{x}\in E$，令 $r=\|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{x}\|>0$，作球 $B_r(\boldsymbol{x})$．任取一点 $\boldsymbol{y}\in B_r(\boldsymbol{x})$，由

$$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|<r=\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|,$$

可见 $\boldsymbol{y}\neq\boldsymbol{a}$，这表明 $\boldsymbol{y}\in E$，我们得出 $B_r(\boldsymbol{x})\subset E$，所以 E 是开集．　□

例 3　设 $r>0$，球 $B_r(\boldsymbol{a})$ 是开集．

证明　任取 $\boldsymbol{c}\in B_r(\boldsymbol{a})$．令 $d=r-\|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}\|>0$，作球 $B_d(\boldsymbol{c})$，我们来证 $B_d(\boldsymbol{c})\subset B_r(\boldsymbol{a})$．事实上，任取 $\boldsymbol{x}\in B_d(\boldsymbol{c})$，那么 $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c}\|<d$，由三角形不等式知

$$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|\leqslant\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c}\|+\|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}\|<d+\|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}\|=r,$$

所以 $\boldsymbol{x}\in B_r(\boldsymbol{a})$，这就证明了 $B_d(\boldsymbol{c})\subset B_r(\boldsymbol{a})$，所以 $\boldsymbol{c}$ 是 $B_r(\boldsymbol{a})$ 的内点．由于 $\boldsymbol{c}$ 是任取的，$B_r(\boldsymbol{a})$ 全由内点组成，因此球 $B_r(\boldsymbol{a})$ 是开集．　□

特别地，数轴上任何开区间都是 $\mathbf{R}$ 中的开集．

定理 13.5　对任何集 E，E 的内部 E° 是开集．

证明　如果 $E^\circ=\varnothing$，那么命题成立．

设 $E^\circ \neq \varnothing$. 任取 $\boldsymbol{c} \in E^\circ$, 即 $\boldsymbol{c}$ 是 E 的一个内点, 故存在 $r>0$, 使得 $B_r(\boldsymbol{c}) \subset E$, 由例 3 可知, 球 $B_r(\boldsymbol{c})$ 中每一点都是 $B_r(\boldsymbol{c})$ 的内点, 因此也是 E 的内点, 这就是说 $B_r(\boldsymbol{c}) \subset E^\circ$, 所以 $\boldsymbol{c}$ 是 E° 的内点. 由于 $\boldsymbol{c}$ 是 E° 的任一点, 所以 E° 全由内点组成, 即 E° 是开集. □

定理 13.5 的结果可以写成 $(E^\circ)^\circ = E^\circ$.

关于开集, 我们有如下的重要定理.

定理 13.6 在空间 $\mathbf{R}^n$ 中:

1° $\mathbf{R}^n$, $\varnothing$ 是开集;

2° 设 $\{E_\alpha\}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个开子集族, 其中指标 α 来自一个指标集 I, 那么并集 $\bigcup\limits_{\alpha \in I} E_\alpha$ 也是开集(任意多个开集的并是开集);

3° 设 $E_1, E_2, \cdots, E_m$ 是有限个开集, 那么交集 $\bigcap\limits_{i=1}^{m} E_i$ 也是开集(有限个开集之交是开集).

证明 1° 是明显的, 只证 2° 与 3°.

任取 $\boldsymbol{a} \in \bigcup\limits_{\alpha \in I} E_\alpha$, 所以存在 $\beta \in I$ 使 $\boldsymbol{a} \in E_\beta$. 由于 E_β 是开集, 所以 $\boldsymbol{a}$ 是 E_β 的一个内点, 因此存在一个球 $B_r(\boldsymbol{a}) \subset E_\beta$, 自然有

$$B_r(\boldsymbol{a}) \subset \bigcup_{\alpha \in I} E_\alpha,$$

这表明 $\boldsymbol{a}$ 是 $\bigcup\limits_{\alpha \in I} E_\alpha$ 的内点, 所以 $\bigcup\limits_{\alpha \in I} E_\alpha$ 是开集.

又任取 $\boldsymbol{a} \in \bigcap\limits_{i=1}^{m} E_i$, 即 $\boldsymbol{a} \in E_i\ (i=1,2,\cdots,m)$, 故存在 $r_i>0$, 使得

$$B_{r_i}(\boldsymbol{a}) \subset E_i\ (i=1,2,\cdots,m),$$

令 $r = \min(r_1, r_2, \cdots, r_m)$, 易见

$$B_r(\boldsymbol{a}) \subset E_i\ (i=1,2,\cdots,m),$$

即

$$B_r(\boldsymbol{a}) \subset \bigcap_{i=1}^{m} E_i,$$

这表明 $\boldsymbol{a}$ 是 $\bigcap\limits_{i=1}^{m} E_i$ 的内点, 从而 $\bigcap\limits_{i=1}^{m} E_i$ 是开集. □

值得指出的是, 定理 13.6 的 3° 中, 开集的个数必须是有限的, 这一条件十分重要. 考察球 $B_{1/i}(\boldsymbol{a})$, $i=1, 2, \cdots$, 这里 $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$, 它们都是开集, 但是

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} B_{1/i}(\boldsymbol{a}) = \{\boldsymbol{a}\},$$

这不是开集.

设 $E \subset \mathbf{R}^n$, 记 $E^c = \mathbf{R}^n \setminus E$, 称 E^c 为点集 E 的**补集**.

定义 13.4 设 $F \subset \mathbf{R}^n$, 如果 F^c 是开集, 则称 F 是**闭集**.

为了建立一个关于闭集的、与定理 13.6 对偶的命题, 我们指出关于集合

的两个等式：设 $E_\alpha\subset\mathbf{R}^n$，其中 α 来自一个指标集，那就有

$$\left(\bigcap_\alpha E_\alpha\right)^c=\bigcup_\alpha E_\alpha^c;$$

$$\left(\bigcup_\alpha E_\alpha\right)^c=\bigcap_\alpha E_\alpha^c,$$

它们被称为 de Morgan 律，其证明是直截了当的，建议读者自己完成.

定理 13.7 在空间 $\mathbf{R}^n$ 中：

1° $\varnothing$，$\mathbf{R}^n$ 是闭集；

2° 设 $\{F_\alpha\}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个闭子集族，其中指标 α 来自一个指标集 I，那么交集 $\bigcap\limits_{\alpha\in I}F_\alpha$ 是闭集(任意多个闭集的交是闭集)；

3° 设 F_1，F_2，$\cdots$，F_m 是有限个闭集，那么并集 $\bigcup\limits_{i=1}^m F_i$ 也是闭集(有限个闭集的并是闭集).

证明 我们只证明 2°，其他两款由读者自己完成.

由于 F_α 是闭集，即 F_α^c 是开集，由 **de Morgan 律**，我们有

$$\left(\bigcap_\alpha F_\alpha\right)^c=\bigcup_\alpha F_\alpha^c,$$

上式右边是若干个开集之并，依定理 13.6 中的 2°可知它是开集，因此 $\bigcap\limits_\alpha F_\alpha$ 是闭集. □

让我们看看闭集的例子.

例 4 由例 1 可知，在 $\mathbf{R}^2$ 中由横轴上的点和下半平面中的点所组成的集合是闭集.

例 5 由例 2 及定理 13.6 的 3°可知，除去 $\mathbf{R}^n$ 中的有限多个点所成的集是开集，因此 $\mathbf{R}^n$ 中有限个点所成的集是闭集.

例 6 在 $\mathbf{R}^n$ 中，开球的补集是闭集.

为了得到一个不依赖开集而直接判别一个集是不是闭集的方法，我们需要引入**凝聚点**这一概念. 把 $B_r(\boldsymbol{a})\setminus\{\boldsymbol{a}\}$ 叫做以 $\boldsymbol{a}$ 为球心，以 $r>0$ 为半径的**空心球**，记之以 $B_r(\check{\boldsymbol{a}})$，即令

$$B_r(\check{\boldsymbol{a}})=\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n:0<\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|<r\}.$$

定义 13.5 设 $E\subset\mathbf{R}^n$，若 $\boldsymbol{a}\in\mathbf{R}^n$ 有这样的性质：对任何 $r>0$，在空心球 $B_r(\check{\boldsymbol{a}})$中总有 E 中的点，那么称点 $\boldsymbol{a}$ 为 E 的**凝聚点**.

请注意，E 的凝聚点可以属于 E，也可以不属于 E. 例如在数轴上考虑开区间$(0,1)$，这时$[0,1]$中的点都是它的凝聚点，但 0 与 1 不在$(0,1)$中. 若 E 中的点不是 E 的凝聚点，称它为 E 的**孤立点**.

定理 13.8 1° 点 $\boldsymbol{a}$ 是 E 的凝聚点当且只当以 $\boldsymbol{a}$ 为球心的任何球中都有 E 中的无限多个点；

2° 点 $\boldsymbol{a}$ 是 E 的凝聚点当且只当可从 E 中选出互不相同的点组成的点列

$\{\boldsymbol{x}_i\}$，使得

$$\lim_{i\to\infty}\boldsymbol{x}_i=\boldsymbol{a}.$$

请读者自己完成定理的证明.

定义 13.6 点集 $E\subset\mathbf{R}^n$ 的凝聚点的全体称为 E 的**导集**，记作 E'. 记 $\overline{E}=E\cup E'$，称 $\overline{E}$ 为 E 的**闭包**.

定理 13.9 E 是闭集的必要充分条件是 $E'\subset E$.

证明 1° **必要性**

设 E 是闭集，因此 E^c 是开集. 任取一点 $\boldsymbol{a}\in E^c$，存在球 $B_r(\boldsymbol{a})$使得 $B_r(\boldsymbol{a})\subset E^c$ 中，所以 $B_r(\boldsymbol{a})$中一定没有 E 中的点，因此 $\boldsymbol{a}$ 不是 E 的凝聚点. 这表明任何 E 的凝聚点必在 E 中，即 $E'\subset E$.

2° **充分性**

设 $E'\subset E$. 任取 $\boldsymbol{a}\in E^c$，这时 $\boldsymbol{a}$ 必不是 E 的凝聚点，因此必有 $r>0$ 使 $B_r(\boldsymbol{a})$中不含 E 的点，所以 $B_r(\boldsymbol{a})\subset E^c$ 中，这表明 E^c 是一开集，所以 E 是闭集. □

推论 E 是闭集的必要充分条件是：E 中的任何收敛点列的极限必在 E 中.

证明 1° **必要性**

设 E 中的收敛点列$\{\boldsymbol{x}_i\}$有极限 $\boldsymbol{a}$，如果点列中只有有限多点，显然当 i 充分大时有 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{x}_i\in E$；如果$\{\boldsymbol{x}_i\}$中有无限多点，那么 $\boldsymbol{a}\in E'\subset E$ (定理 13.9).

2° **充分性**

任取 $\boldsymbol{a}\in E'$，从 E 中可以选出点列$\{\boldsymbol{x}_i\}$使 $\boldsymbol{x}_i\to\boldsymbol{a}\in E$，所以 $E'\subset E$，依定理 13.9，E 是闭集. □

必须注意，在这里开和闭不是对立的概念. 事实上，存在着既不是开集又不是闭集的集合，例如空心的闭圆盘$\{(x,y):0<x^2+y^2\leqslant 1\}$就是这样的集合；也存在着既是开集又是闭集的集合，例如 $\mathbf{R}^n$ 和空集$\varnothing$都是这样的集合. 不过可以证明，$\mathbf{R}^n$ 中除去这两个集外就不再有既开又闭的集合(见练习题 13.5).

定理 13.10 E 的导集 E' 与闭包 $\overline{E}$ 都是闭集.

证明 任取 $\boldsymbol{a}\in(E')^c$，也就是说 $\boldsymbol{a}$ 不是 E 的凝聚点，所以存在一球 $B_r(\boldsymbol{a})$，其中至多只有 E 中的一个点，因此 $B_r(\boldsymbol{a})$中的任一点都不是 E 的凝聚点，即 $B_r(\boldsymbol{a})\subset(E')^c$，这说明$(E')^c$ 是一开集，从而 E' 是闭集.

再证 $\overline{E}$ 是闭集. 设 $\overline{E}$ 中的收敛点列$\{\boldsymbol{x}_i\}$有极限 $\boldsymbol{a}$，不妨设$\{\boldsymbol{x}_i\}$中有无穷多个不同的点. 如果其中有一子列中的点全属于 E，那么 $\boldsymbol{a}\in E'\subset\overline{E}$；如果其中有一子列中的点全属于 E'，由于已证 E' 是闭集，所以 $\boldsymbol{a}\in E'\subset\overline{E}$. 根据定理 13.9 的推论知 $\overline{E}$ 是闭集. □

定理 13.11 E°是含于E内的最大开集，$\overline{E}$是包含着E的最小闭集.

证明 设开集$B\subset E$，任取$\boldsymbol{b}\in B$，则有一球$B_r(\boldsymbol{b})\subset B\subset E$，这表明$\boldsymbol{b}$是$E$的一个内点，因此$\boldsymbol{b}\in E^\circ$，所以$B\subset E^\circ$.

再设闭集$F\supset E$，任取$\boldsymbol{a}\in E'$，因此从E中可以找出点列$\{\boldsymbol{x}_i\}$收敛于$\boldsymbol{a}$，点列$\{\boldsymbol{x}_i\}$也可以看成是F中的点列，由于F是闭集，根据定理 13.9 的推论可知$\boldsymbol{a}\in F$，故$F\supset E'$，又$F\supset E$，可见$F\supset E'\cup E=\overline{E}$. □

定义 13.7 点集$E\subset\mathbf{R}^n$，$(E^c)^\circ$中的点称为E的**外点**，E的外点的全体称为E的**外部**；既不是E的内点也不是E的外点的点称为E的**边界点**，E的边界点的全体称为E的**边界**，记为∂E.

很明显，若$\boldsymbol{a}$是E的外点，则必存在一球$B_r(\boldsymbol{a})$使得其中完全不含E中的点；点$\boldsymbol{b}$是E的边界点，当且只当在任何球$B_r(\boldsymbol{b})$中既有E中的点，也有E^c中的点.

例 7 如果$E=\mathbf{R}^n$，那么$E^\circ=E$，$(E^c)^\circ=\partial E=\varnothing$.

例 8 设$E=\{\boldsymbol{a}\}$是独点集. 这时$E^\circ=\varnothing$，$(E^c)^\circ=E^c$，$\partial E=E$.

例 9 设E是$\mathbf{R}^2$中一条直线上的点的全体，那么$E^\circ=\varnothing$，$(E^c)^\circ=E^c$，$\partial E=E$.

例 10 令$E=B_r(\boldsymbol{a})$，$r>0$，是$\mathbf{R}^n$中的球. 这时$E^\circ=E$，

$$(E^c)^\circ=\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n:\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|>r\},$$

$$\partial E=\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n:\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|=r\}.$$

总之，对一切集$E\subset\mathbf{R}^n$，E°，$(E^c)^\circ$与∂E互不相交，并且

$$E^\circ\cup(E^c)^\circ\cup\partial E=\mathbf{R}^n.$$

在实数集的情形，我们有"闭区间套定理"（定理 1.9），在$\mathbf{R}^n$中，与之相应的是闭集套定理. 为了叙述这一定理，还需要有一个定义. 设非空的$E\subset\mathbf{R}^n$，记

$$\operatorname{diam}(E)=\sup\{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|:\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in E\},$$

称这个数为集合E的**直径**. 显然$\operatorname{diam}(E)$为有限数，当且只当E是有界的.

定理 13.12（闭集套定理） 设$\{F_i\}$，$F_i\neq\varnothing$，$i=1,2,3,\cdots$是一闭集列，并且$F_1\supset F_2\supset F_3\supset\cdots$，若

$$\lim_{i\to\infty}\operatorname{diam}(F_i)=0,$$

那么$\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}F_i$只含唯一的一点.

证明 因为F_i不是空集，所以对每一$i\in\mathbf{N}_+$，可取出一点$\boldsymbol{x}_i\in F_i$；由于$\{F_i\}$形成一个"套"，所以

$$\{\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{x}_{i+1},\boldsymbol{x}_{i+2},\cdots\}\subset F_i,\qquad i\in\mathbf{N}_+,$$

由此可知当k，$l>i$时

$$\|x_k - x_l\| \leqslant \operatorname{diam}(F_i) \to 0 \ (i \to \infty),$$

这表明$\{x_i\}$是一个基本点列，故必收敛于一点 a. 但$\{F_i\}$都是闭集，且当 $k \geqslant i$ 时 $x_k \in F_i$，所以 $a \in F_i$ 对一切 $i \in \mathbf{N}_+$ 成立，因此 $a \in \bigcap_{i=1}^{\infty} F_i$.

如果又有 $b \in \bigcap_{i=1}^{\infty} F_i$，则 a，$b \in F_i$ $(i = 1,2,\cdots)$，从而 $\|a - b\| \leqslant \operatorname{diam}(F_i)$，令 $i \to \infty$ 得到 $\|a - b\| = 0$，即 $a = b$，所以 $\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i$ 是独点集. □

练习题 13.3

1. 对于下列各题中指定的集合 A，求出 A°，$\overline{A}$ 和∂A.

   (1) 在 $\mathbf{R}$ 中，令 $A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots\right\}$;

   (2) 在 $\mathbf{R}^2$ 中，令 $A = \{(x,y): 0 < y < x+1\}$;

   (3) A 是 $\mathbf{R}^n$ 的有限点集.

2. 设 $A = \{(x,y): x, y$ 均为有理数$\}$，求 A°，$(A^c)^\circ$和∂A.
3. 证明：$p \in \overline{A}$ 的一个必要充分条件是对一切 $r > 0$ 有 $B_r(p) \cap A \neq \varnothing$.
4. 证明：$\partial A = \overline{A} \cap (A^\circ)^c$.
5. 证明：$A^\circ = (\overline{A^c})^c$.
6. 证明：(1) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$; (2) $(\overline{A \cup B}) = \overline{A} \cup \overline{B}$.
7. (1) 作出闭集列$\{F_i\}$使得$\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i = B_1(\mathbf{0})$;

   (2) 作出开集列$\{G_i\}$使得$\bigcap_{i=1}^{\infty} G_i = \overline{B_1(\mathbf{0})}$.

8. 设 I 为一指标集，证明：

   (1) $(\overline{\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha}) \subset \bigcap_{\alpha \in I} \overline{A_\alpha}$; (2) $(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha)^\circ \supset \bigcup_{\alpha \in I} A^\circ_\alpha$.

   举例说明：真包含关系是可以出现的.

9. 设 $E \subset \mathbf{R}^n$. 求证：∂E 是闭集.
10. 设 G_1，$G_2 \subset \mathbf{R}^n$ 是两个不相交的开集，证明：$G_1 \cap \overline{G_2} = \overline{G_1} \cap G_2 = \varnothing$.
11. 设 P：$\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$，具体地说，设$(x,y) \in \mathbf{R}^2$，则 $P(x,y) = x$，P 叫做**投影算子**. 设 E 为 $\mathbf{R}^2$ 中的开集，求证：$P(E)$是 $\mathbf{R}$ 中的开集. 举出例子：A 是 $\mathbf{R}^2$ 中的闭集，但 $P(A)$不是 $\mathbf{R}$ 中的闭集.
12. E 为闭集的必要充分条件是 $E \supset \partial E$.

问题 13.3

1. 对任意 $E \subset \mathbf{R}^n$. 证明：$\partial \overline{E} \subset \partial E$.

2. 设 G 为 $\mathbf{R}$ 中非空的有界开集，求证：G 必可表示为至多可数个互不相交的开区间的并集.
3. 设 F 是 $\mathbf{R}$ 中的非空的有界闭集，如果它不是一个闭区间，那么一定是从一个闭区间除去至多可数个互不相交的开区间而成.

§13.4 列紧集和紧致集

在实数轴上，我们还有所谓“有限覆盖定理”(定理 1.14)，这个定理在 $\mathbf{R}^n$ 中也有相应的推广.

定义 13.8 设 $E\subset\mathbf{R}^n$，如果 E 中的任一点列都有一子列收敛于 E 中的一点，则称 E 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个**列紧集**.

下面的定理道出了 $\mathbf{R}^n$ 中的列紧集实际上是有界闭集.

定理 13.13 $\mathbf{R}^n$ 中的集合 E 为列紧集的必要充分条件是 E 是有界闭集.

证明 1° **必要性**

如果 E 无界，那么必可以找出一个点列 $\{\boldsymbol{x}_i\}\subset E$ 满足 $\|\boldsymbol{x}_i\|>i$ ($i=1,2,3,\cdots$)，显然点列 $\{\boldsymbol{x}_i\}$ 没有收敛的子列，因此 E 不可能是列紧集. 若 E 不是闭集，由定理 13.9 的推论，必有收敛点列 $\{\boldsymbol{x}_i\}\subset E$，使得 $\boldsymbol{x}_i\to\boldsymbol{a}$ ($i\to\infty$)，但 $\boldsymbol{a}\overline{\in}E$，因此 $\{\boldsymbol{x}_i\}$ 的一切子列都收敛于 $\boldsymbol{a}\overline{\in}E$，$E$ 不是列紧集.

2° **充分性**

设 E 是有界闭集. 任取一点列 $\{\boldsymbol{x}_i\}\subset E$，点列 $\{\boldsymbol{x}_i\}$ 是有界的，依 Bolzano - Weierstrass 定理(定理 13.4)，从 $\{\boldsymbol{x}_i\}$ 中可选出收敛子列 $\{\boldsymbol{x}_{k_i}\}$ 使得 $\boldsymbol{x}_{k_i}\to\boldsymbol{a}$ ($i\to\infty$). 因为 E 是闭集及 $\{\boldsymbol{x}_{k_i}\}\subset E$，故 $\boldsymbol{a}\in E$，这表明 E 是一个列紧集. □

定义 13.9 设 $E\subset\mathbf{R}^n$，$\mathscr{T}=\{G_\alpha\}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个开集族. 如果

$$E\subset\bigcup_\alpha G_\alpha,$$

我们称开集族 $\mathscr{T}$ 覆盖了 E，或者称 $\mathscr{T}$ 是 E 的一个**开覆盖**.

显然 $\mathscr{T}=\{G_\alpha\}$ 覆盖了 E 的意思是，对任何 $\boldsymbol{a}\in E$，一定有一开集 $G_\alpha\in\mathscr{T}$ 使得 $\boldsymbol{a}\in G_\alpha$.

定理 1.14 告诉我们，在 $\mathbf{R}$ 中，对有限闭区间成立着有限覆盖定理，那么对 $\mathbf{R}^n$ 中怎样的集合才成立有限覆盖定理呢？为此先引进

定义 13.10 设 $E\subset\mathbf{R}^n$，若能从 E 的任一个开覆盖中选出有限个开集，它们仍能组成 E 的开覆盖，那么称 E 为一**紧致集**.

下列定理刻画出 $\mathbf{R}^n$ 中紧致集的特征.

定理 13.14 $E\subset\mathbf{R}^n$ 为紧致集的一个必要充分条件是 E 是有界闭集.

证明 1° 必要性

设 E 为紧致集. 考虑以"原点" $\mathbf{0}=(0,0,\cdots,0)$ 为球心, 以 $m\in\mathbf{N}_+$ 为半径的球 $B_m(\mathbf{0})$, 因为

$$E\subset\mathbf{R}^n=\bigcup_{m=1}^{\infty}B_m(\mathbf{0}),$$

所以 $\mathscr{T}=\{B_m(\mathbf{0}):m\in\mathbf{N}_+\}$ 是 E 的一个开覆盖. 从 $\mathscr{T}$ 中可以选出有限个元素, 记为

$$B_{k_1}(\mathbf{0}),\ B_{k_2}(\mathbf{0}),\ \cdots,\ B_{k_t}(\mathbf{0}),$$

它们仍组成 E 的一个开覆盖. 令

$$s=\max\{k_1,k_2,\cdots,k_t\},$$

显然 $E\subset B_s(\mathbf{0})$, 因此 E 是有界的.

再证 E 是闭集. 这只需证明 E^c 是开集. 设 $\boldsymbol{p}\in E^c$. 对于每一点 $\boldsymbol{q}\in E$ 必定存在充分小的球 $B_r(\boldsymbol{q})$, 使得 $B_r(\boldsymbol{p})\cap B_r(\boldsymbol{q})=\varnothing$, 这里的半径 $r>0$ 与点 $\boldsymbol{q}$ 有关. 所有这种球 $B_r(\boldsymbol{q})$ 的全体显然是 E 的一个开覆盖. 由于 E 是紧致集, 存在有限个球

$$B_{r_1}(\boldsymbol{q}_1),\ B_{r_2}(\boldsymbol{q}_2),\ \cdots,\ B_{r_m}(\boldsymbol{q}_m),$$

它们组成 E 的一个开覆盖. 因为

$$B_{r_i}(\boldsymbol{q}_i)\cap B_{r_i}(\boldsymbol{p})=\varnothing,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ m,$$

令

$$U=\bigcap_{i=1}^{m}B_{r_i}(\boldsymbol{p}),$$

事实上, U 是以点 $\boldsymbol{p}$ 为球心的同心球中半径最小的那一个, 由此可见 U 与

$$\bigcup_{i=1}^{m}B_{r_i}(\boldsymbol{q}_i)$$

不相交, 所以 $E\cap U=\varnothing$, 由此 $\boldsymbol{p}\in U\subset E^c$. 这说明 $\boldsymbol{p}$ 是 E^c 的内点. 由于 $\boldsymbol{p}$ 是 E^c 中的任何点, 所以 E^c 是一开集, 从而 E 是闭集.

2° 充分性

设 E 是有界闭集. 首先用一个 n 维闭长方体 I 把 E 包围在内, 记

$$I=I_1\times I_2\times\cdots\times I_n,$$

其中每一个 $I_i=[a_i,b_i]$ 是 $\mathbf{R}$ 中的闭区间. 考虑 $\mathbf{R}^n$ 中具有如下形式的闭长方体:

$$K=J_1\times J_2\times\cdots\times J_n,\tag{1}$$

这里每一个 J_i 或者是 $\left[a_i,\ \dfrac{a_i+b_i}{2}\right]$, 或者是 $\left[\dfrac{a_i+b_i}{2},\ b_i\right]$. 那么容易看出

$\operatorname{diam} J=\frac{1}{2}\operatorname{diam} I$，而且 $J\subset I$. 另一方面，I 中的任一点一定落在某个具有形式(1)的长方体 J 中. 由于每一个 J_i 有两种选择，所以形如(1)的闭长方体共有 2^n 个，把它们重新编号为

$$K_1,\ K_2,\ \cdots,\ K_{2^n},$$

就得到

$$I=K_1\cup K_2\cup\cdots\cup K_{2^n},\tag{2}$$

$$\operatorname{diam} K_i=\frac{1}{2}\operatorname{diam} I,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ 2^n.\tag{3}$$

如果 E 不是紧致集，设 $\{G_\alpha\}$ 是 E 的一个开覆盖，那么它的任意有限子族都不能覆盖 E，因而在(2)中存在某个 K_i，不妨记其为 F_1，使得

$$F_1\cap E$$

不能被 $\{G_\alpha\}$ 的任意有限子族所覆盖，显然由(3)知

$$\operatorname{diam}(F_1\cap E)\leqslant\operatorname{diam} F_1=\frac{1}{2}\operatorname{diam} I.$$

再把 F_1 按(2)分解成 2^n 个闭长方体的并，其中又至少有某一个闭长方体 F_2，使得

$$F_2\cap E$$

不能被 $\{G_\alpha\}$ 的任意有限子族所覆盖，而且

$$\operatorname{diam}(F_2\cap E)\leqslant\operatorname{diam} F_2=\frac{1}{2}\operatorname{diam} F_1=\frac{1}{2^2}\operatorname{diam} I.$$

这个过程一直可以无限进行下去，我们得到一列闭集 $H_k=F_k\cap E$，$k=1,\ 2,\ \cdots$，它们满足下列条件：

(i) $H_1\supset H_2\supset\cdots$；

(ii) $\operatorname{diam} H_k\leqslant\frac{1}{2^k}\operatorname{diam} I\to 0$，$k\to\infty$；

(iii) 每个 H_k 都不能被 $\{G_\alpha\}$ 的任意有限子族所覆盖.

从(i)和(ii)知道，$\{H_k\}$ 满足闭集套定理(定理13.12)的条件，因而存在唯一的 $\boldsymbol{\xi}\in\bigcap_{k=1}^{\infty}H_k$ 和 $\boldsymbol{x}_k\in H_k$，使得 $\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{\xi}$. 因为 $\boldsymbol{\xi}\in E$，而 $\{G_\alpha\}$ 是 E 的一个开覆盖，故必存在某个开集 $G_\alpha\in\{G_\alpha\}$，使得 $\boldsymbol{\xi}\in G_\alpha$，因而存在 $r>0$，使得

$$B_r(\boldsymbol{\xi})\subset G_\alpha.$$

从 $\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{\xi}$ 和 $\lim_{k\to\infty}\operatorname{diam} H_k=0$，对任意 $\boldsymbol{x}\in H_k$，可取充分大的 k，使得

$$\|\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{\xi}\|<\frac{r}{2},\quad\|\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{x}\|<\frac{r}{2},$$

于是

$$\| x-\xi \| \leqslant \| x-x_k \| + \| x_k-\xi \| < r.$$

这说明 $x\in B_r(\xi)$，即 $H_k\subset B_r(\xi)\subset G_\alpha$ 这和(iii)矛盾. □

从定理 13.13 和定理 13.14 知道，在 $\mathbf{R}^n$ 中，有界闭、列紧和紧致是三个等价的概念. 有界闭集的列紧性和紧致性在下面的讨论中将起到非常关键的作用.

练习题 13.4

1. 设 P 是投影算子，$A\subset\mathbf{R}^2$ 是紧致集，证明：$P(A)$也是紧致集.
2. 设 A，$B\subset\mathbf{R}$，证明：$A\times B$ 为紧致集的充分必要条件是 A 和 B 都是紧致集.
3. 证明 $A\subset\mathbf{R}^n$ 为紧致集的充分必要条件是：若 $\mathscr{F}=\{A_\alpha\}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个闭集族，且 $A\cap(\bigcap\limits_\alpha A_\alpha)=\varnothing$，则有 A_1，A_2，…，$A_k\in\mathscr{F}$，使 $A\cap\left(\bigcap\limits_{i=1}^{k}A_i\right)=\varnothing$.
4. 如果 $A\subset\mathbf{R}^n$ 的每一个无穷子集在 A 中都有一个凝聚点，则说 A 是 Fréchet 紧的. 证明：在 $\mathbf{R}^n$ 中 Fréchet 紧与列紧是等价的.
5. 设 F_1，F_2，…，F_k，…是 $\mathbf{R}^n$ 中的非空闭集，满足 $F_k\supset F_{k+1}(k\geqslant 1)$. 问是否一定有 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}F_k\neq\varnothing$？若改为非空紧致集又如何？

问题 13.4

1. 设 $E\subset\mathbf{R}^n$ 是一有界闭集，$\{G_\alpha\}$是 E 的一个开覆盖，那么必定存在 $\sigma>0$（通常称这个数为开覆盖$\{G_\alpha\}$的 Lebesgue 数），使得只要集合 $F\subset\mathbf{R}^n$ 满足条件
$$F\cap E\neq\varnothing,\ \operatorname{diam}(F)<\sigma,$$
就能断言 F 能被$\{G_\alpha\}$中某一个开集所覆盖.
2. 试用上题的结论证明：设$\{G_\alpha\}$是 $\mathbf{R}^n$ 中有界闭集 E 的一个开覆盖，那么必能从$\{G_\alpha\}$中选出有限个开集，它们仍能组成 E 的开覆盖.

§ 13.5 集合的连通性

在前面讨论一元函数的微分和积分的时候，都是针对定义在一个区间上的函数进行的. 区间的一个特点是它具有连通性，粗略地说，它是“连成一片”的.

许多定理和命题，只有在具备连通性的点集上才能成立．在 $\mathbf{R}^n$ 的情形，我们也要研究"连成一片"的点集，因为多元函数的某些定理和命题，只是建立在连通的点集上的．

首先，我们给出

定义 13.11　设 $E\subset\mathbf{R}^n$．如果 E 的任一分解式 $E=A\cup B$ 适合条件 $A\neq\varnothing$，$B\neq\varnothing$，并且 $A\cap B=\varnothing$，便可导致以下二式

$$A\cap B'\neq\varnothing \text{和} A'\cap B\neq\varnothing$$

将至少有一个成立，那么称 E 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个**连通集**，或者说 E 是**连通的**．这就是说，当我们将 E 分解为两个不空的、不相交的集合之并时，其中至少有一个含着另一个的凝聚点，在这种情况下，E 才是连通的．

定义 13.12　在 $\mathbf{R}^n$ 中，连通的开集称为**区域**；区域的闭包称为**闭区域**．

当 $E\subset\mathbf{R}^n$ 是开集的情况下，连通性的定义可以有比较简单的等价形式．

定理 13.15　开集 $E\subset\mathbf{R}^n$ 为连通集的必要充分条件是 E 不能分解成为两个不相交的非空开集之并．

证明　1°　**必要性**

如果有分解式 $E=A\cup B$，其中 A 与 B 是非空开集，并且 $A\cap B=\varnothing$．由于 A 是开集，A 的每一点都不是 B 的凝聚点；对称地，由于 B 是开集，B 的每一点也不是 A 的凝聚点．这个事实可以写成

$$A\cap B'=A'\cap B=\varnothing,$$

因此 E 不是连通的．

2°　**充分性**

如果 E 不连通，那么存在不相交的非空集 A 和 B 使得 $E=A\cup B$，并且 A 不含 B 的凝聚点，B 也不含 A 的凝聚点．任取 $\boldsymbol{a}\in A$，自然有 $\boldsymbol{a}\in E$，由于 E 是开集，存在 $r>0$ 使球 $B_r(\boldsymbol{a})\subset E$；又因 $\boldsymbol{a}$ 不是 B 的凝聚点，存在 $s>0$ 使球 $B_s(\boldsymbol{a})$中无 B 的点，两个球中较小的那一个必全在 A 中，所以 A 是开集；对称地，B 也为开集．　□

在数直线上只有区间才是连通集．我们有下面的

定理 13.16　在 $\mathbf{R}$ 上，集合 E 连通的必要充分条件是 E 为区间．

证明　1°　**必要性**

设 E 是 $\mathbf{R}$ 上的连通集．任取不同的两点 a，$b\in E$，不妨设 $a<b$，如果能证明$[a,b]\subset E$，那么 E 必是区间了．假如有一点 $c\in(a,b)$，但 $c\overline{\in}E$，作集合

$$A=\{x\in E:x<c\},\quad B=\{x\in E:x>c\},$$

这时 A，B 都非空，并且 $E=A\cup B$，显然此时 A 中的凝聚点(如果存在的话)$\leqslant c$，所以 B 中没有 A 的凝聚点，同样 A 中也没有 B 的凝聚点．这说明 E 不

是连通集，产生矛盾.

2° **充分性**

设 E 是数轴上的任一区间. 作分解 $E=A\cup B$，其中 A，B 是两个不相交的非空集. 由于 A，B 非空，可设存在 $a\in A$，$b\in B$. 不妨设 $a<b$，于是 $[a,b]\subset E$. 用区间的中点 $(a+b)/2$ 将这区间对分，如果这中点属于 A，那么取 $a_1=(a+b)/2$，$b_1=b$；否则令 $a_1=a$，$b_1=(a+b)/2$. 按照作对分区间套的办法，可作出闭区间套 $[a_k,b_k]$，其中 $a_k\in A$，$b_k\in B$ $(k\in\mathbf{N}_+)$. 设这些区间的公共点为 c，因此有 $a_k\to c$，$b_k\to c$ $(k\to\infty)$. 很明显，如果 $c\in A$，那么 $c\overline{\in}B$，从而 $c\in B'$，这表明 $A\cap B'\neq\varnothing$，类似地，当 $c\in B$ 时，$A'\cap B\neq\varnothing$，所以 E 是连通的. □

为了方便地判别一个点集是否连通，这里引入一个比较直观的连通性概念.

定义 13.13 设 $E\subset\mathbf{R}^n$. 如果对于任意两点 $\boldsymbol{p}$，$\boldsymbol{q}\in E$，都有一条“连续曲线” $l\subset E$ 将 $\boldsymbol{p}$ 与 $\boldsymbol{q}$ 联结，则说点集 E 是**道路连通**的. 所谓 $\mathbf{R}^n$ 中的**连续曲线** l（见第 8 章），是指 l 可以表示为参数方程：

$$x_i=\varphi_i(t),\ i=1,2,\cdots,n,$$

其中诸 φ_i 是区间 $[a,b]$ 上的连续函数，并且

$$\boldsymbol{p}=(\varphi_1(a),\ \varphi_2(a),\ \cdots,\ \varphi_n(a)),$$

$$\boldsymbol{q}=(\varphi_1(b),\ \varphi_2(b),\ \cdots,\ \varphi_n(b)).$$

利用区间的连通性可以证得

定理 13.17 道路连通集一定是连通集.

证明 设 $E\subset\mathbf{R}^n$ 是一道路连通集. 设 $E=A\cup B$，其中 A 和 B 非空且互不相交. 在 A 中任取一点 $\boldsymbol{p}$，在 B 中任取一点 $\boldsymbol{q}$，则有一条连续曲线 $\Gamma\subset E$ 把 $\boldsymbol{p}$，$\boldsymbol{q}$ 两点连接起来. 令

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=(\varphi_1(t),\ \varphi_2(t),\ \cdots,\ \varphi_n(t)),\ t\in[a,b]$$

是 Γ 的参数方程，并置

$$F=\{t\in[a,b]:\ \boldsymbol{\Phi}(t)\in A\},$$

$$G=\{t\in[a,b]:\ \boldsymbol{\Phi}(t)\in B\}.$$

易知 F 和 G 是互不相交的非空集合，使得 $F\cup G=[a,b]$. 由于区间 $[a,b]$ 是连通集，$F'\cap G$ 和 $F\cap G'$ 这两个集中至少有一个不空，不妨设 $c\in F\cap G'$，从 $c\in G'$ 可知，有数列 $\{t_i\}\subset G$，使得 $\lim\limits_{i\to\infty}t_i=c$. 由于 φ_1，φ_2，$\cdots$，φ_n 连续，所以

$$\lim_{i\to\infty}\boldsymbol{\Phi}(t_i)=\boldsymbol{\Phi}(c).$$

一方面，由 $\boldsymbol{\Phi}(t_i)\in B$ $(i=1,2,3,\cdots)$ 可知 $\boldsymbol{\Phi}(c)\in B'$；另一方面利用 $c\in F$ 又知 $\boldsymbol{\Phi}(c)\in A$. 由此得出 $\boldsymbol{\Phi}(c)\in A\cap B'$，它不是空集. 所以集合 E 是连通

的. □

作为这一定理的直接推论是：道路连通的开集是区域.

例 1 在 $\mathbf{R}^n$ 中开球是区域.

证明 我们已知球 $B_r(\boldsymbol{a})$是开集，因此只需证明它是连通的. 任取 $\boldsymbol{p}$，$\boldsymbol{q}\in B_r(\boldsymbol{a})$，连结这两点的直线 Γ 的方程是

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=(1-t)\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{q},\ 0\leqslant t\leqslant 1.$$

因为 $\|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{a}\|<r$，$\|\boldsymbol{q}-\boldsymbol{a}\|<r$，于是

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{\Phi}(t)-\boldsymbol{a}\| &= \|(1-t)\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{q}-(1-t)\boldsymbol{a}-t\boldsymbol{a}\| \\ &\leqslant \|(1-t)(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{a})\|+\|t(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{a})\| \\ &=(1-t)\|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{a}\|+t\|\boldsymbol{q}-\boldsymbol{a}\| \\ &<(1-t)r+tr=r,\end{aligned}$$

所以 Γ 上的点都在这球内，即 $B_r(\boldsymbol{a})$是道路连通的，因此也是连通的. 所以开球是区域. □

练习题 13.5

1. 证明：区域必是道路连通的. 这就是说，对开集而言连通与道路连通是等价的.
2. 设 $A\subset\mathbf{R}$，如果 A 既是开集又是闭集，求证：$A=\varnothing$或者 $A=\mathbf{R}$.
3. 设 $A\subset\mathbf{R}^n$，如果 A 既是开集又是闭集，求证：$A=\varnothing$或者 $A=\mathbf{R}^n$.

问题 13.5

1. 设 $E\subset\mathbf{R}^n$ 为连通集，求证：$\overline{E}$ 也是连通集.
2. 举例说明连通集不一定是道路连通的.

§13.6 多变量函数的极限

在§2.1 中，我们详细地介绍过最一般的集合之间的映射，有了这个概念，理解多变量函数的概念就不会有任何困难.

定义 13.14 设 $D\subset\mathbf{R}^n$，那么映射 f：$D\to\mathbf{R}$ 称为一个 $\boldsymbol{n}$ **元函数**，其中 D 称为函数f 的**定义域**，而 $f(D)\subset\mathbf{R}$ 称为 f 的**值域**.

设点 $\boldsymbol{x}\in D$，我们把它记成 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$. 这样，$f$ 在点 $\boldsymbol{x}\in D$ 处所取的值可以写成 $f(\boldsymbol{x})$，也可以写成 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，写成哪一种形式，全看我们的方便. 变数 $x_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ 称为 f 的**自变量**.

有了多元函数的定义之后，接着就是要定义多元函数的极限.

定义 13.15 设 $D\subset\mathbf{R}^n$ 以及 f: $D\to\mathbf{R}$. 点 $\boldsymbol{a}\in\mathbf{R}^n$ 是 D 的一个凝聚点(即 $\boldsymbol{a}\in D'$)，又设 l 是一个数. 如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，凡是 $\boldsymbol{x}\in D$ 且 $0<\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|<\delta$ 时，便有

$$|f(\boldsymbol{x})-l|<\varepsilon,$$

我们就称函数 f 在点 $\boldsymbol{a}$ 处有**极限** l，也可以说是当 $\boldsymbol{x}$ 趋向于 $\boldsymbol{a}$ 时，$f(\boldsymbol{x})$ 趋向于 l，记作

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}}f(\boldsymbol{x})=l,$$

或者更简单些，写作

$$f(\boldsymbol{x})\to l\ (\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}).$$

应当提醒读者：f 可以在 $\boldsymbol{a}$ 没有定义，并且即使 f 在 $\boldsymbol{a}$ 处有定义，在考虑当 $\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}$ 的过程中 f 的极限的时候，数值 $f(\boldsymbol{a})$ 也不会被考虑.

例 1 定义二元函数

$$f(\boldsymbol{p})=f(x,y)=\frac{x^2y^2}{x^2+y^2},\quad \boldsymbol{p}=(x,y)\neq(0,0).$$

易见 f 在 $\mathbf{R}^2\setminus\{\mathbf{0}\}$ 上有定义，但这无妨于我们来考虑极限 $\lim\limits_{\boldsymbol{p}\to\mathbf{0}}f(\boldsymbol{p})$.

由于

$$0\leqslant f(\boldsymbol{p})=\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\leqslant x^2+y^2=\|\boldsymbol{p}\|^2,$$

所以对于任意给定的 $\varepsilon>0$，取 $\delta=\sqrt{\varepsilon}$，凡是 $0<\|\boldsymbol{p}-\mathbf{0}\|=\|\boldsymbol{p}\|<\delta$ 时，便有

$$0\leqslant f(\boldsymbol{p})\leqslant\|\boldsymbol{p}\|^2<\delta^2=\varepsilon,$$

这就说明了

$$\lim_{\boldsymbol{p}\to\mathbf{0}}f(\boldsymbol{p})=0.\qquad\square$$

在讨论单变量函数的极限时，变动的自变量总是在过一个点的线段的左右两侧变化，因此两个单侧极限存在且相等就足以保证极限的存在. 但在多变量极限的情形，函数定义域 D 中的点向它的一个凝聚点趋近可以有各种不同的途径，可以是沿着种种不同的直线方向的，也可以是通过曲线路径去趋近的，因此，情况变得异常复杂. 所幸的是，函数极限可以转化为数列极限来研究，因为我们有

定理 13.18 设 $D\subset\mathbf{R}^n$，f: $D\to\mathbf{R}$. 点 $\boldsymbol{a}\in D'$. 函数极限

$$\lim_{x\to a}f(x)=l$$

的必要充分条件是：对任何点列$\{x_i\}\subset D$，$x_i\neq a$ $(i=1,2,3,\cdots)$ 且 $x_i\to a$ $(i\to\infty)$，数列极限

$$\lim_{i\to\infty}f(x_i)=l.$$

证明　必要性比较显然，请读者自行证之.

现在来证明充分性. 如果 f 在点 a 不以 l 为极限，对某一个 $\varepsilon_0>0$，对一切 $m\in\mathbf{N}_+$，可以取出一个点 $x_m\in D$ 适合 $0<\|x_m-a\|<\frac{1}{m}$，并使得$|f(x_m)-l|\geqslant\varepsilon_0$. 这时点列 $x_i\subset D$ 并且$x_i\to a$ $(i\to\infty)$但是数列$\{f(x_i)\}$ 不以 l 为极限. □

例 2　讨论函数

$$f(p)=\frac{xy}{x^2+y^2},\ p=(x,y)\neq(0,0)$$

在原点(0,0)处极限的存在性.

解　很明显

$$|f(p)|=\frac{1}{2}\frac{2|xy|}{x^2+y^2}\leqslant\frac{1}{2},$$

这说明函数 f 在其定义域上是有界的，但是它在原点处极限不存在.

取点列 $s_i=\left(\frac{1}{i},\ 0\right)$与 $t_i=\left(\frac{1}{i},\ \frac{1}{i}\right)$，$i=1,2,\cdots$，易见 $f(s_i)=0$，$f(t_i)=\frac{1}{2}(i=1,2,\cdots)$，而$\lim\limits_{i\to\infty}s_i=\lim\limits_{i\to\infty}t_i=\mathbf{0}$，所以 f 在点$\mathbf{0}$处极限不存在.
□

例 3　讨论函数

$$f(p)=\frac{x^2y}{x^4+y^2}$$

在(0,0)处的极限.

解　如果点 p 在坐标轴 $x=0$ 上(原点除外)，显然有 $f(p)=0$；当点沿着直线 $y=kx$ 而趋向原点时，我们也有

$$\lim_{x\to0}\frac{kx^3}{x^4+k^2x^2}=\lim_{x\to0}\frac{kx}{x^2+k^2}=0,$$

这里 k 为任意固定的实数. 这表明，当点沿着指向原点的任意直线而趋向于原点时，函数 f 趋向于零. 即使如此，并不足以保证 f 在原点极限的存在性. 事实上，当点沿着抛物线 $y=x^2$ 而趋向于原点时，f 保持常数$\frac{1}{2}$. 所以 f 在(0,0)没有极限. □

我们知道，对一元函数的极限，可以进行四则运算. 事实上，对多元函数

的极限而言，也存在着相应的运算法则．具体地说，我们有

定理 13.19 设 f，g：$D\to\mathbf{R}^n$，$\boldsymbol{a}\in D'$，如果存在着有限的极限

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}}f(\boldsymbol{x})=l,\ \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}}g(\boldsymbol{x})=m,$$

那么有

1° $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}}(f\pm g)(\boldsymbol{x})=l\pm m$；

2° $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}}fg(\boldsymbol{x})=lm$；

3° $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}}\left(\dfrac{f}{g}\right)(\boldsymbol{x})=\dfrac{l}{m}$，其中 $m\neq0$.

证明留给读者．

定理 13.20 设函数 f 在以 $\boldsymbol{a}\in\mathbf{R}^n$ 为球心，r 为半径的某个空心球 $B_r(\check{\boldsymbol{a}})$ 中有定义，并且 $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}}f(\boldsymbol{x})=l$；一元函数 φ 在以 l 为中心的空心球 $U=\{t:0<|t-l|<\delta\}$ 有定义，并且 $\lim\limits_{t\to l}\varphi(t)=m$．再设

$$f(B_r(\check{\boldsymbol{a}}))\subset U,$$

那么就有

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}}\varphi(f(\boldsymbol{x}))=m.$$

证明 在 $B_r(\check{\boldsymbol{a}})$ 中任取一个收敛于 $\boldsymbol{a}$ 的点列 $\{\boldsymbol{x}_i\}$，其相应的函数值序列 $\{f(\boldsymbol{x}_i)\}\subset U$，并且 $\lim\limits_{i\to\infty}f(\boldsymbol{x}_i)=l$，根据单变量函数极限的复合原则，有

$$\lim_{i\to\infty}\varphi(f(\boldsymbol{x}_i))=m,$$

由定理 13.18，得知

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}}\varphi(f(\boldsymbol{x}))=m.\quad\square$$

定理 13.21（Cauchy 收敛原理） 设 $D\subset\mathbf{R}^n$，$\boldsymbol{a}\in D'$，f：$D\to\mathbf{R}$．那么极限 $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}}f(\boldsymbol{x})$ 存在的必要充分条件是：对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得凡是 $\boldsymbol{x}'$，$\boldsymbol{x}''\in D$ 且

$$0<\|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{a}\|<\delta \text{ 和 } 0<\|\boldsymbol{x}''-\boldsymbol{a}\|<\delta$$

同时成立时，就一定有 $|f(\boldsymbol{x}')-f(\boldsymbol{x}'')|<\varepsilon$.

证明可以仿照定理 2.10 来进行． $\square$

多变量函数的极限还有其他各种过程．例如说，设函数 f 在闭球 $\overline{B}_r(\boldsymbol{0})$ 的外面有定义，$l\in\mathbf{R}$，如果对于任何给定的 $\varepsilon>0$，都可以找到 $K>r>0$，只要 $\|\boldsymbol{x}\|>K$ 时便有

$$|f(\boldsymbol{x})-l|<\varepsilon$$

成立，这时记为

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\infty}f(\boldsymbol{x})=l \text{ 或 } f(\boldsymbol{x})\to l\ (\boldsymbol{x}\to\infty),$$

请注意：在这里"∞"的前面不能带上正负号．前面的所有定理，只需作出明

显的修改之后对这种极限过程仍然适用，恕不赘述.

练习题 13.6

1. 确定并画出下列二元函数的定义域：

(1) $u = x + \sqrt{y}$；　(2) $u = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{y^2 - 1}$；

(3) $u = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$；　(4) $u = \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}$；

(5) $u = \arcsin \dfrac{y}{x}$；　(6) $u = \log (x + y)$；

(7) $u = f(x, y) = \sqrt{x}$；　(8) $u = \arccos \dfrac{x}{x + y}$.

2. 确定下列三元函数的定义域，并几何地描述它们：

(1) $u = \log (xyz)$；　(2) $u = \log \sqrt{2 - (x^2 + y^2 + z^2)}$；

(3) $u = f(x, y, z) = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$；　(4) $u = \arccos \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

3. 计算下列极限：

(1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin (xy)}{x}$；　(2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2 + y^2)^{x^2 y^4}$；

(3) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\log (x + e^y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$；　(4) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to+\infty \\ y\to+\infty}} \left(\frac{xy}{x^2 + y^2}\right)^{x^2}$；

(5) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} \frac{x + y}{x^2 - xy + y^2}$；　(6) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to+\infty \\ y\to+\infty}} (x^2 + y^2) e^{-(x+y)}$.

4. 证明定理 13.19.

5. 设二元函数 f 在 (x_0, y_0) 的某一空心邻域中有定义. 对任意固定的 y，如果极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x, y)$ 存在，令

$$\varphi(y) = \lim_{x\to x_0} f(x, y),$$

它是一个定义在 y_0 近旁的函数，如果 $\lim\limits_{y\to y_0} \varphi(y)$ 存在，那么就令

$$\lim_{y\to y_0} \lim_{x\to x_0} f(x, y) = \lim_{y\to y_0} \varphi(y),$$

称之为函数 f 在点 (x_0, y_0) 处的一个**累次极限**. 类似地可以定义另一个累次极限

$$\lim_{x\to x_0} \lim_{y\to y_0} f(x, y).$$

(1) 计算函数

$$f(x,y)=\frac{x^2y}{x^4+y^2}$$

在原点的两个累次极限；

(2) 计算

$$\lim_{x\to\infty}\lim_{y\to\infty}\sin\left(\frac{\pi x}{2x+y}\right),\quad \lim_{y\to\infty}\lim_{x\to\infty}\sin\left(\frac{\pi x}{2x+y}\right);$$

(3) 计算

$$\lim_{x\to+\infty}\lim_{y\to0+}\frac{x^y}{1+x^y},\quad \lim_{y\to0+}\lim_{x\to+\infty}\frac{x^y}{1+x^y}.$$

6. 设

$$f(x,y)=(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y},$$

证明：f 在原点处两个累次极限均不存在，但是极限

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0.$$

7. 证明：若二元函数 f 在某一点的两个累次极限和极限都存在，则这三个值必相等.

§ 13.7 多变量连续函数

现在，我们来讨论连续函数. 首先给出

定义 13.16 设 $D\subset\mathbf{R}^n$，f: $D\to\mathbf{R}$，$\boldsymbol{a}\in D$. 如果对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$ 使得当 $\boldsymbol{x}\in D\cap B_\delta(\boldsymbol{a})$时，一定有

$$|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{a})|<\varepsilon,$$

则说函数 f 在点 $\boldsymbol{a}$ **连续**，$\boldsymbol{a}$ 称为 f 的一个**连续点**；D 中 f 的非连续点称为 f 的**间断点**.

如果 f 在 D 的每个点上都连续，则称 **f 在 D 上连续**.

注意：f 在 $\boldsymbol{a}$ 处连续，首先必须在点 $\boldsymbol{a}$ 处有定义. 定义 13.16 中的 δ 通常是依赖于给定的 ε 的.

例 1 设 D 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个有限子集，例如说，设 $D=\{\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_m\}$，定义函数 f: $D\to\mathbf{R}$ 为 $f(\boldsymbol{p}_i)=\lambda_i\ (i=1,2,\cdots,m)$，这里 λ_1，λ_2，$\cdots$，λ_m 是任意给定的数，那么依照定义 13.16，f 在 D 上连续. □

如果 $\boldsymbol{a}$ 是 E 的孤立点，也就是说，如果 $\boldsymbol{a}\in E$，又存在一球 $B_r(\boldsymbol{a})$，使其中除 $\boldsymbol{a}$ 之外再也没有 E 的点时，$\boldsymbol{a}$ 就是 E 的孤立点. 显然，如果 E 为有限个点所成的集，那么 E 中的点都是孤立点. 函数 f: $D\to\mathbf{R}$ 在 D 的孤立点处总是

连续的.

当 $\boldsymbol{a}\in E\cap E'$ 时，f 在点 $\boldsymbol{a}$ 处连续的必要充分条件是

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{a}).$$

例 2 如果 f 为一常值函数，显然它在任意集合上都是连续的.

例 3 设 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，定义函数

$$f(\boldsymbol{x})=x_i\ (i=1,2,\cdots,n),$$

称之为 $\boldsymbol{x}$ **在第 i 个坐标轴上的投影**，则 f 在 $\mathbf{R}^n$ 上是连续函数.

证明 任取 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in\mathbf{R}^n$，那么 $f(\boldsymbol{a})=a_i$，于是

$$|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{a})|=|x_i-a_i|\leqslant\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|,$$

由此可见函数 f 在 $\mathbf{R}^n$ 上是连续的. □

既然多变量函数的连续的定义与单变量函数的连续的定义相同，因此在上册里已经对连续函数证明过的那些性质，例如说连续函数的四则运算性质，连续函数经过复合仍是连续函数的性质等等，经过明显的修改之后便可推广到多变量函数的情形，无庸赘述.

例 4 由变量 x_1，x_2，$\cdots$，x_n 与数通过有限次的加、乘运算而得到的代数式称为 **n 元多项式**. 设 $P(\boldsymbol{x})=P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$和 $Q(\boldsymbol{x})=Q(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 都是 n 元多项式，由例 2 和例 3 的结论，便可推知

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} P(\boldsymbol{x})Q(\boldsymbol{x})=P(\boldsymbol{a})Q(\boldsymbol{a});$$

以及

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}}\frac{P(\boldsymbol{x})}{Q(\boldsymbol{x})}=\frac{P(\boldsymbol{a})}{Q(\boldsymbol{a})}(\text{设 } Q(\boldsymbol{a})\neq 0)\ .$$

例 5 讨论二元函数

$$f(\boldsymbol{p})=\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$$

的连续性.

解 f 作为两个二元多项式之商，它在$(x,y)\neq(0,0)$时是连续的. 在前节的例 1 中已证明$\lim\limits_{\boldsymbol{p}\to\boldsymbol{0}} f(\boldsymbol{p})=0$，所以若补充定义 $f(\boldsymbol{0})=0$，那么 f 在 $\mathbf{R}^2$ 上处处连续. □

例 6 设 $f(x,y,z)=\sin(xy+z)$，则 f 在 $\mathbf{R}^3$ 上连续.

证明 $xy+z$ 是一个三元多项式，在 $\mathbf{R}^3$ 上处处连续，令 $\varphi(t)=\sin t$，则 φ 是 $\mathbf{R}$ 上的连续函数，所以通过复合之后，$f(x,y,z)=\sin(xy+z)$在 $\mathbf{R}^3$ 上连续. □

例 7 设

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0);\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

讨论 f 的连续性.

解　当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时，f 是连续的. 在前节的例 2 中已经指明 $\lim\limits_{p\to 0}f(\boldsymbol{p})$ 不存在，所以 f 在 $\mathbf{0}$ 点处不连续. 总之，f 在 $\mathbf{R}^2\setminus\{\mathbf{0}\}$ 上连续.　□

定义 13.17　$D\subset\mathbf{R}^n$，f: $D\to\mathbf{R}$. 如果任意给定 $\varepsilon>0$，总存在 $\delta>0$，使得凡是 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}\in D$ 且 $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|<\delta$ 时，便有 $|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{y})|<\varepsilon$，则称 f 在 D 上**一致连续**.

由定义显然可知，对有限点集 $D\subset\mathbf{R}^n$，任何函数 f: $D\to\mathbf{R}$ 在 D 上都是一致连续的；常值函数在任何点集 D 上是一致连续的.

例 8　函数

$$f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2},\quad x^2+y^2>0$$

在其定义域 $\{\mathbf{0}\}^c$ 上不一致连续.

证明　当 $x\neq 0$ 时，$\|(x,x)-(x,0)\|=|x|$ 可以要多小就有多小，但是

$$|f(x,x)-f(x,0)|=\frac{1}{2},$$

由此显见 f 在其定义域上不一致连续.　□

但是，我们有

定理 13.22　设 $D\subset\mathbf{R}^n$，f: $D\to\mathbf{R}$，f 在 D 上连续. 如果 D 是紧致集，那么 f 在 D 上一致连续.

证明　用反证法. 如果 f 在 D 上不一致连续，则存在一个 $\varepsilon_0>0$，使得对任何 $i\in\mathbf{N}_+$，在 D 中可以找出两个点列 $\{\boldsymbol{x}_i\}$，$\{\boldsymbol{y}_i\}$，使得

$$\|\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{y}_i\|<\frac{1}{i},$$

但

$$|f(\boldsymbol{x}_i)-f(\boldsymbol{y}_i)|\geqslant\varepsilon_0,$$

由于 D 是紧致的，即列紧的，所以从点列 $\{\boldsymbol{x}_i\}$ 中可以找出子列 $\{\boldsymbol{x}_{k_i}\}$ 收敛于点 $\boldsymbol{x}\in D$，这时有不等式

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{y}_{k_i}-\boldsymbol{x}\|&\leqslant\|\boldsymbol{y}_{k_i}-\boldsymbol{x}_{k_i}\|+\|\boldsymbol{x}_{k_i}-\boldsymbol{x}\|\\&<\frac{1}{k_i}+\|\boldsymbol{x}_{k_i}-\boldsymbol{x}\|\leqslant\frac{1}{i}+\|\boldsymbol{x}_{k_i}-\boldsymbol{x}\|,\end{aligned}$$

由此可知，当 $i\to\infty$ 时，$\boldsymbol{y}_{k_i}\to\boldsymbol{x}$，在

$$|f(\boldsymbol{x}_{k_i})-f(\boldsymbol{y}_{k_i})|\geqslant\varepsilon_0$$

中，令 $i\to\infty$，由 f 的连续性将得出

$$0=|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x})|\geqslant\varepsilon_0>0,$$

这产生矛盾，就证明了 f 在 D 上是一致连续的.　□

例 9　设函数 f 在 $\mathbf{R}^n$ 上连续，并且极限 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 存在且有限，那么 f 在 $\mathbf{R}^n$ 上一致连续.

证明　由于所说的极限存在，对任意给定的 $\varepsilon>0$，必存在 $r>0$，使得凡是 $\|\boldsymbol{x}_1\|>r$ 及 $\|\boldsymbol{x}_2\|>r$ 时有

$$|f(\boldsymbol{x}_1)-f(\boldsymbol{x}_2)|<\varepsilon. \tag{1}$$

考察闭球 $\bar{B}_{r+1}(\mathbf{0})$，它是一个有界闭集，即是列紧集，由此 f 在 $\bar{B}_{r+1}(\mathbf{0})$ 上是一致连续的，从而对 $\varepsilon>0$，存在正数 $\delta<1$，使得凡是 $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2\in\bar{B}_{r+1}(\mathbf{0})$ 且 $\|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2\|<\delta$ 时，便可以使得不等式(1)成立．现在设 $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2\in\mathbf{R}^n$ 且 $\|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2\|<\delta$，我们指出 $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$ 中若有一点(不妨设是 $\boldsymbol{x}_1$)在球 $\bar{B}_r(\mathbf{0})$ 中，另一点(即 $\boldsymbol{x}_2$)必满足 $\|\boldsymbol{x}_2\|\leqslant r+1$，这是因为：

$$\|\boldsymbol{x}_2\|\leqslant\|\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1\|+\|\boldsymbol{x}_1\|<\delta+r<1+r.$$

这说明满足 $\|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2\|<\delta$ 的两点 $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，或同时满足 $\|\boldsymbol{x}_1\|>r$，$\|\boldsymbol{x}_2\|>r$，或同时在闭球 $\bar{B}_{r+1}(\mathbf{0})$ 之内．无论在哪一种情形，均能使(1)式成立．　□

定理 13.23　设 $D\subset\mathbf{R}^n$，f：$D\to\mathbf{R}$，f 在 D 上连续．如果 D 是紧致集，那么 D 的值域 $f(D)$ 也是紧致集．

证明　D 是紧致的，所以也是列紧的．在 $f(D)$ 中任取一点列 $\{y_i\}$，则在 D 中有一点列 $\{\boldsymbol{x}_i\}$ 使得 $f(\boldsymbol{x}_i)=y_i$ $(i=1,2,\cdots)$．由于 D 是列紧的，点列 $\{\boldsymbol{x}_i\}$ 有收敛的子列 $\{\boldsymbol{x}_{k_i}\}$ 收敛于 D 中的一点 $\boldsymbol{x}$．但 f 是 D 上的连续函数，所以

$$\lim_{i\to\infty} f(\boldsymbol{x}_{k_i})=f(\boldsymbol{x})\in f(D),$$

这就是说，从点列 $\{y_i\}$ 中可以挑出收敛的子列 $\{y_{k_i}\}$，并且

$$\lim_{i\to\infty} y_{k_i}=\lim_{i\to\infty} f(\boldsymbol{x}_{k_i})=f(\boldsymbol{x})\in f(D).$$

由此可知 $f(D)$ 是列紧的，因而也是紧致的．　□

作为上述定理的推论，我们有

定理 13.24　设 $D\subset\mathbf{R}^n$，f：$D\to\mathbf{R}$ 连续，如果 D 是一紧致集，那么 f 在 D 上能取到它的最小值和最大值．

证明　前一定理告诉我们，$f(D)$ 是紧致集．因此易证出

$$\inf f(D)\in f(D),\quad \sup f(D)\in f(D),$$

所以在 D 中有点 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 使得

$$f(\boldsymbol{a})=\inf f(D),\quad f(\boldsymbol{b})=\sup f(D),$$

这表明连续函数 f 在 D 中的两点 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 处分别取到它的最小值和最大值．　□

在单变量函数的情形，如果连续函数 f 在一区间的两点上取符号不同的数值，那么在这个区间上一定有一点使 f 取零值．一般地还有所谓的“介值定理”．这个定理主要是建立在区间的连通性上，而不是它的紧致性．例如，设

$D=\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\}\subset\mathbf{R}^n$，定义 $f(\boldsymbol{a})=1$，$f(\boldsymbol{b})=-1$，显然 f 是连续函数，D 为紧致集，但 D 中没有点使 f 取零值．在多变量函数的情形，也还是定义域的连通性保证了介值定理的正确性．

首先，我们需要下列定理．

定理 13.25　设 $D\subset\mathbf{R}^n$ 是一连通集，函数 f：$D\to\mathbf{R}$ 是连续的，那么 $f(D)$ 是 $\mathbf{R}$ 的连通集．

证明　设有分解式 $f(D)=A\cup B$，其中 A，B 非空且不相交．于是

$$D=f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B),$$

其中 $f^{-1}(A)$ 和 $f^{-1}(B)$ 非空且不相交．由 D 的连通性可知，可设 $f^{-1}(A)$ 含有 $f^{-1}(B)$ 的凝聚点，即 $f^{-1}(B)$ 中有点列 $\{\boldsymbol{x}_i\}$ 收敛于 $f^{-1}(A)$ 中的点 $\boldsymbol{x}$．函数 f 是连续函数，所以 $f(\boldsymbol{x}_i)\to f(\boldsymbol{x})(i\to\infty)$．由于 $\{f(\boldsymbol{x}_i)\}\subset B$，$f(\boldsymbol{x})\in A$，这表明 A 中有 B 的凝聚点．这样就证明了 $f(D)$ 是 $\mathbf{R}$ 中的连通集．　□

定理 13.26（介值定理）　设 $D\subset\mathbf{R}^n$ 是一连通集，函数 f：$D\to\mathbf{R}$ 连续．如果 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}\in D$ 和 $r\in\mathbf{R}$ 使得

$$f(\boldsymbol{a})<r<f(\boldsymbol{b}),$$

那么存在 $\boldsymbol{c}\in D$ 使得 $f(\boldsymbol{c})=r$．

证明　由前一定理可知 $f(D)$ 是 $\mathbf{R}$ 中的连通集，依据定理 13.16 知 $f(D)$ 是区间，由于 $f(\boldsymbol{a})$，$f(\boldsymbol{b})\in f(D)$，所以 $(f(\boldsymbol{a}),f(\boldsymbol{b}))\subset f(D)$；再因 $r\in(f(\boldsymbol{a}),f(\boldsymbol{b}))$，得到 $r\in f(D)$，即存在一点 $\boldsymbol{x}\in D$ 使得 $f(\boldsymbol{c})=r$．　□

这样我们就把单变量连续函数的许多重要性质推广到了多变量的情形，这些性质的正确性大多来自于函数的定义域的紧致性，只有连续函数的介值定理依赖于函数定义域的连通性．

作为本节的结尾，我们举一个稍难的例子．

设 D 是 $\mathbf{R}^n$ 中的凸域，如果对任意 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}\in D$ 及任意 $\lambda\in[0,1]$ 有

$$f(\lambda\boldsymbol{x}+(1-\lambda)\boldsymbol{y})\leqslant\lambda f(\boldsymbol{x})+(1-\lambda)f(\boldsymbol{y}),\tag{2}$$

就称 f 为 D 上的凸函数．显然，它是单变量凸函数概念的推广．

例 10　证明：凸域 D 上的凸函数必是 D 上的连续函数．

证明　设 f 是凸域 D 上的凸函数，我们先证明它在 D 的任何紧致子集上有界．在 D 中任取一 n 维的闭长方体 H，先证 f 在 H 上有上界．从不等式(2)容易看出

$$f(\lambda\boldsymbol{x}+(1-\lambda)\boldsymbol{y})\leqslant\max(f(\boldsymbol{x}),\ f(\boldsymbol{y})),$$

这说明 f 在线段 $\{\lambda\boldsymbol{x}+(1-\lambda)\boldsymbol{y}:0\leqslant\lambda\leqslant1\}$ 上的值不超过 f 在线段两端点值中之大者．由此便可断言，f 在 H 上的值不超过 f 在 H 的 2^n 个顶点上的值之最大者．因此，f 在 H 上有上界．再由有限覆盖定理便知 f 在 D 的任何紧致子集上有上界．再证 f 在 H 上也有下界．不然的话，必存在点列 $\{\boldsymbol{x}_i\}\subset H$，使得 $\lim\limits_{i\to\infty}f(\boldsymbol{x}_i)=-\infty$．由于 H 是

紧致集，$\{x_i\}$中有收敛子列$\{x_{k_i}\}$，使得 $\lim\limits_{i\to\infty}x_{k_i}=x_0\in H$. 今取 i 充分大，使得 $\|x_{k_i}-x_0\|$ 充分小，这样，$2x_0-x_{k_i}$仍属于 D. 由 f 的凸性可得

$$f(x_0)=f\left(\frac{1}{2}x_{k_i}+\frac{1}{2}(2x_0-x_{k_i})\right)$$

$$\leqslant\frac{1}{2}f(x_{k_i})+\frac{1}{2}f(2x_0-x_{k_i}).$$

由于$\{2x_0-x_{k_i}\}$是一有界点列，f 在其上有上界. 在上式中让 $i\to\infty$ 即得 $f(x_0)=-\infty$，这是不可能的. 因而 f 在 H 上有下界，再由有限覆盖定理，f 在 D 的任意紧致子集上有下界.

现在证明 f 在 D 中连续. 任取 $a\in D$，我们证明 f 在 a 处连续. 选取 $r>0$，使得 $B_{2r}(a)\subset D$. 任取 x，$y\in B_r(a)$，连接 x，y 设其与 $B_{2r}(a)$的边界交于z，可写

$$z=y+\lambda(x-y)$$

显然 $\|z-y\|\geqslant\|x-y\|$，所以 $\lambda>1$.
由于

$$x=\frac{1}{\lambda}z+\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)y,$$

因而

$$f(x)\leqslant\frac{1}{\lambda}f(z)+\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)f(y),$$

即

$$f(x)-f(y)\leqslant\frac{1}{\lambda}(f(z)-f(y))\leqslant\frac{2M}{\lambda},\quad(3)$$

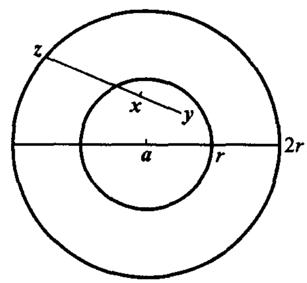


图　13-1

这里 $M=\max\{|f(x)|:\ x\in B_{2r}(a)\}$. 由于 $\lambda\|x-y\|=\|z-y\|\geqslant r$，所以$\frac{1}{\lambda}\leqslant\frac{1}{r}\|x-y\|$. 由(3)即得

$$f(x)-f(y)\leqslant\frac{2M}{r}\|x-y\|.$$

由于 x，y 是在 $B_r(a)$中任意选取的，所以

$$|f(x)-f(y)|\leqslant\frac{2M}{r}\|x-y\|,\quad x,\ y\in B_r(a).$$

由此便知 f 在 $B_r(a)$中一致连续，当然在 a 处连续. □

练习题　13.7

1. 求出下列函数 f 的间断点集：

(1)

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2>0;\\ 0, & x=y=0.\end{cases}$$

(2)

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x+y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2>0;\\ 0, & x=y=0.\end{cases}$$

(3)

$$f(x,y)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{y}, & y\neq 0;\\ 0, & y=0.\end{cases}$$

2. 设

$$f(x,y)=\frac{1}{1-xy},\ (x,y)\in[0,1]^2\setminus\{(1,1)\},$$

求证：f 连续但不一致连续.

3. 设 $A\subset\mathbf{R}^n$，$\boldsymbol{p}\in\mathbf{R}^n$. 定义

$$\rho(\boldsymbol{p},A)=\inf_{\boldsymbol{a}\in A}\{\|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{a}\|\},$$

并称之为点 $\boldsymbol{p}$ 到集合 A 的**距离**.

证明：

(1) 若 $A\neq\varnothing$，则 $\bar{A}=\{\boldsymbol{p}\in\mathbf{R}^n:\rho(\boldsymbol{p},A)=0\}$；

(2) 对任何 $\boldsymbol{p}$，$\boldsymbol{q}\in\mathbf{R}^n$，有

$$|\rho(\boldsymbol{p},A)-\rho(\boldsymbol{q},A)|\leqslant\|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}\|,$$

这说明 $\rho(\boldsymbol{p},A)$ 是 $\boldsymbol{p}$ 在 $\mathbf{R}^n$ 上的连续函数.

4. 设 A，$B\subset\mathbf{R}^n$，定义

$$\rho(A,B)=\inf\{\|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}\|:\boldsymbol{p}\in A,\boldsymbol{q}\in B\},$$

并称之为**集合 A 和 B 之间的距离**.

证明：

(1) 若 A 为紧致集，则存在一点 $\boldsymbol{a}\in A$，使得 $\rho(\boldsymbol{a},B)=\rho(A,B)$；

(2) 若 A 和 B 都是紧致集，则存在点 $\boldsymbol{a}\in A$ 和 $\boldsymbol{b}\in B$ 使得 $\|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\|=\rho(A,B)$；

(3) 设 A 为紧致集，B 为闭集，则 $\rho(A,B)=0$ 当且只当 $A\cap B\neq\varnothing$.

5. 作出两个不相交的闭集 A，B，使得 $\rho(A,B)=0$.

6. 设 $A\subset\mathbf{R}^n$ 有界，证明：对任何常数 $c>0$，

$$\{\boldsymbol{p}\in\mathbf{R}^n:\rho(\boldsymbol{p},A)\leqslant c\}$$

是紧致集.

问题 13.7

1. 设连续的 f: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ 既取正值，也取负值，求证：集合 $E = \{p \in \mathbf{R}^n : f(p) \neq 0\}$ 是非连通集.
2. 设 A，B 是 $\mathbf{R}^n$ 中不相交的闭集，证明存在 $\mathbf{R}^n$ 上的连续函数 h，使得：
$$h(A) = \{1\},\ h(B) = \{0\},\ h(\mathbf{R}^n) = [0,1].$$
3. 设 A，B 是 $\mathbf{R}^n$ 中不相交的闭集，证明存在不相交的开集 G 和 H，使得 $A \subset G$，$B \subset H$.

§13.8 连续映射

现在，我们把多变量函数的概念进一步推广，即考虑从 $D \subset \mathbf{R}^n$ 到 $\mathbf{R}^m$ 的映射，当 $m = 1$ 时，我们回到了 n 元函数. 我们用 $\boldsymbol{f}$ 来表示这种映射 $\boldsymbol{f}$: $D \to \mathbf{R}^m$，其中 $D \subset \mathbf{R}^n$，与函数的情形不同，这里用了黑体 $\boldsymbol{f}$，以着重强调它的“值”是 m 维欧氏空间的点，也就是一个 m 维向量. 当我们用 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$，$\boldsymbol{x} \in D$ 来表示这种映射时，这种记法的外形(除了黑体之外)与单变量函数的记法没有差别，但是应当注意，这里 $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$ 而 $\boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^m$. 设 $\boldsymbol{y}$ 按分量写出来是 $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_m)$，而 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 时，那么给定一个映射相当于给定了 m 个 n 元函数：

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n), \\ y_2 = f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n), \\ \quad \cdots\cdots \\ y_m = f_m(x_1, x_2, \cdots, x_n), \end{cases} \qquad (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in D \subset \mathbf{R}^n.$$

反过来也是这样的，那就是说，如果给定了 m 个定义在 $D \subset \mathbf{R}^n$ 上的函数，就相当于给出了定义在 D 上、射到 $\mathbf{R}^m$ 中的一个映射，或者说在 D 上定义了一个在 $\mathbf{R}^m$ 中取值的**向量值函数**. 我们把这一事实表示为

$$\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, \cdots, f_m),$$

其中 f_i: $D \to \mathbf{R}$ 称为 $\boldsymbol{f}$ 的第 i 个分量函数，$i = 1, 2, \cdots, n$.

例 1 给定 $m \times n$ 矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

其中 $a_{ij}\in\mathbf{R}$ $(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$，那么通过矩阵等式

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{1}$$

便确定了一个由 $\mathbf{R}^n$ 到 $\mathbf{R}^m$ 的映射．这种映射我们称作**线性映射**．这是一种由 $\mathbf{R}^n$ 到 $\mathbf{R}^m$ 的最简单的映射． □

在这里，映射的定义域和值域分别是 $\mathbf{R}^n$ 和 $\mathbf{R}^m$ 的子集，而 $\mathbf{R}^n$ 和 $\mathbf{R}^m$ 都是 Euclid 空间，都是定义着距离的．有"距离"，就可以衡量点的"远近"，由此自然就可以定义映射的极限．

定义 13.18 设 $D\subset\mathbf{R}^n$，$\boldsymbol{f}$: $D\to\mathbf{R}^m$，又设 $\boldsymbol{a}\in D'$，$\boldsymbol{p}\in\mathbf{R}^m$．如果对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在一个 $\delta>0$ 使得凡是 $\boldsymbol{x}\in D$ 且 $0<\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|<\delta$ 时便有

$$\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{p}\|<\varepsilon,$$

那么就称映射 $\boldsymbol{f}$ 在点 $\boldsymbol{a}$ 有极限 $\boldsymbol{p}$，记为

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{p},$$

也可以简记为

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\to\boldsymbol{p}\ (\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}).$$

利用几何的语言，上述极限定义也可以表述为：对于任意给定的球 $B_\varepsilon(\boldsymbol{p})\subset\mathbf{R}^m$，必存在一球 $B_\delta(\boldsymbol{a})\subset\mathbf{R}^n$，只要当 D 中的点 $\boldsymbol{x}$ 在空心球 $B_\delta(\check{\boldsymbol{a}})$ 中，它的像必在球 $B_\varepsilon(\boldsymbol{p})$ 中．

注意：一般来说，上述两种球的维数不同，自然最好是再添上字母 m，n 以示区别．但是如果在行文之中不致产生误解时，我们就图个省事算了．

同 n 维空间的点列的收敛等价于它们的每一个分量组成的数列的收敛一样，映射的极限也可以转化为它的每一分量所组成的函数极限来研究．具体地说，我们有

定理 13.27 设 $D\in\mathbf{R}^n$，$\boldsymbol{f}$: $D\to\mathbf{R}^m$，$\boldsymbol{a}\in D'$，$\boldsymbol{p}=(p_1,p_2,\cdots,p_m)\in\mathbf{R}^m$，$\boldsymbol{f}=(f_1,f_2,\cdots,f_m)$．那么，

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{p}$$

当且只当

$$\lim_{x\to a} f_i(x) = p_i, \quad i = 1, 2, \cdots, m.$$

如果读者复习一下定理 13.2 的证明，一定会认为上述结论是显然成立的．下面的定理中的结论同样明显．

定理 13.28 设 $D\subset \mathbf{R}^n$，$\boldsymbol{a}\in D'$．又设 $\boldsymbol{f}$: $D\to\mathbf{R}^m$ 以及 $\boldsymbol{g}$: $D\to\mathbf{R}^m$，并且

$$\lim_{x\to a}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{p},\ \lim_{x\to a}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{q},$$

于是我们有

1° 对于任何 $\lambda\in\mathbf{R}$，可以得出 $\lim\limits_{x\to a}(\lambda\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})) = \lambda\boldsymbol{p}$；

2° $\lim\limits_{x\to a}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}$.

定义 13.19 点集 $D\subset\mathbf{R}^n$，$\boldsymbol{f}$: $D\to\mathbf{R}^m$，$\boldsymbol{a}\in D$．如果对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$ 使得凡是 $\boldsymbol{x}\in D\cap B_\delta(\boldsymbol{a})$时便有 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\in B_\varepsilon(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}))$，称映射 $\boldsymbol{f}$ 在点 $\boldsymbol{a}$ 连续．

当 $\boldsymbol{f}$ 在 D 中每一点都连续时，称映射 $\boldsymbol{f}$ 在 D 上连续．

很明显，映射 $\boldsymbol{f}$ 在 D 中的一点 $\boldsymbol{a}$（在 D 上)连续，必须且只需 $\boldsymbol{f}$ 的每一个分量函数在点 $\boldsymbol{a}$（在 D 上)连续．由此可知，例 1 中的线性映射在 $\mathbf{R}^n$ 上是连续的．

关于连续映射有下面的刻画：

定理 13.29 设 D 是 $\mathbf{R}^n$ 中的开集，$\boldsymbol{f}$: $D\to\mathbf{R}^m$，$\boldsymbol{f}$ 在 D 上连续的充分必要条件是：对任意 $\mathbf{R}^m$ 中的开集 G，$\boldsymbol{f}^{-1}(G)$是 $\mathbf{R}^n$ 中的开集．这里

$$\boldsymbol{f}^{-1}(G) = \{\boldsymbol{x}\in D : \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\in G\}.$$

证明 先证必要性．设 f 在 D 上连续，G 是 $\mathbf{R}^m$ 中的开集，要证 $\boldsymbol{f}^{-1}(G)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的开集．如果 $\boldsymbol{f}^{-1}(G)$是空集，它当然是开集．不然取 $\boldsymbol{x}_0\in\boldsymbol{f}^{-1}(G)$，那么 $\boldsymbol{f}(x_0)\in G$．因为 G 是 $\mathbf{R}^m$ 中的开集，故存在 $\varepsilon>0$，使得 $B_\varepsilon(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0))\subset G$．又因 $\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{x}$ 处连续，对于刚才的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，只要 $\boldsymbol{x}\in B_\delta(\boldsymbol{x}_0)$，便有 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\in B_\varepsilon(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0))$，即 $\boldsymbol{f}(B_\delta(\boldsymbol{x}_0))\subset G$，因而 $B_\delta(\boldsymbol{x}_0)\subset\boldsymbol{f}^{-1}(G)$．这正好说明 $\boldsymbol{f}^{-1}(G)$是 $\mathbf{R}^n$ 中的开集．

再证充分性．任取 $\boldsymbol{x}_0\in D$，对于充分小的 $\varepsilon>0$，记 $G = B_\varepsilon(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0))$，则 G 是 $\mathbf{R}^m$ 中的开集，按假定，$\boldsymbol{f}^{-1}(G)$是 $\mathbf{R}^n$ 中的开集，因为 $\boldsymbol{x}_0\in\boldsymbol{f}^{-1}(G)$，故有 $\delta>0$，使得 $B_\delta(\boldsymbol{x}_0)\subset\boldsymbol{f}^{-1}(G)$，即 $\boldsymbol{f}(B_\delta(\boldsymbol{x}_0))\subset G$．这就是说，对任意 $\boldsymbol{x}\in B_\delta(\boldsymbol{x}_0)$，有 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\in B_\varepsilon(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0))$．所以 $\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处连续．由于 $\boldsymbol{x}_0$ 是 D 中的任意点，故 $\boldsymbol{f}$ 在 D 中连续． □

但是必须注意，连续映射未必把开集映成开集．例如 $f(x) = x^2$ 把 $\mathbf{R}$ 中的开集$(-1,1)$映成 $\mathbf{R}$ 中的$[0,1)$，后者不是 $\mathbf{R}$ 中的开集．

如果对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 δ，凡是 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}\in D$ 且 $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|<\delta$ 时均可使得 $\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})\|<\varepsilon$ 成立，那么称映射 $\boldsymbol{f}$ 在 D 上**一致连续**．

显然，常值函数在其定义域上是一致连续的；如果 $D\subset\mathbf{R}^n$ 是一有限点集，那么任何映射 f: $D\to\mathbf{R}^m$ 在 D 上一致连续.

映射 f 在 D 上一致连续当且只当 f 的每一个分量函数在 D 上是一致连续的.

与定理 13.22 相当，我们有

定理 13.30 设 $D\subset\mathbf{R}^n$，f: $D\to\mathbf{R}^m$ 是 D 上的连续映射. 如果 D 是紧致集，那么 f 在 D 上是一致连续的.

为证明这一定理，可以逐字逐句地照抄定理 13.22 的证明，只需将那里的所有数的绝对值改成向量的范数.

对于映射而言，相当于介值定理的是下列定理.

定理 13.31 设 $D\subset\mathbf{R}^n$，映射 f: $D\to\mathbf{R}^m$ 在 D 上连续. 如果 D 是 $\mathbf{R}^n$ 中的连通集，那么 $f(D)$ 是 $\mathbf{R}^m$ 中的连通集.

这一定理的证明，与定理 13.25 的证明完全类似.

与定理 13.23 平行，这儿我们有

定理 13.32 设 $D\subset\mathbf{R}^n$，映射 f: $D\to\mathbf{R}^m$ 在 D 上连续. 如果 D 是 $\mathbf{R}^n$ 中的紧致集，那么 $f(D)$ 是 $\mathbf{R}^m$ 中的紧致集.

因为紧致集与有界闭集等价，所以上面的定理也可说成是连续映射把有界闭集映成有界闭集. 但是必须注意，连续映射未必把有界集映成有界集，也未必把闭集映成闭集. 请读者自己举出这样的反例.

练习题 13.8

1. 设 f: $\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$ 连续，$E\subset\mathbf{R}^n$. 求证：$f(\bar{E})\subset\overline{f(E)}$. 问在什么条件下有 $f(\bar{E})=\overline{f(E)}$.
2. 设 $E\subset\mathbf{R}$，f: $E\to\mathbf{R}^m$.
   (1) 若 E 是闭集，f 连续，则 f 的图像
   $$G(f)=\{(x,f(x)):\ x\in E\}$$
   是 $\mathbf{R}^{m+1}$ 中的闭集；
   (2) 若 E 是紧致集，f 连续，求证：$G(f)$ 也是紧致集；
   (3) 若 $G(f)$ 是紧致集，求证：f 连续.

问题 13.8

1. 设 $E\subset\mathbf{R}^n$ 是紧致集，f 是 E 上连续的单射，记 $f(E)=D$，证明映射 f^{-1} 在

D 上连续.

2. 证明：不存在由$[0,1]$到单位圆周上的一对一的连续映射.
3. 证明：不存在由$[0,1]$到$[0,1]\times[0,1]$上的一对一的连续映射.

第 14 章　多变量函数的微分学

在第 13 章中，我们已经讨论过多变量函数及其连续性．在单变量函数的情形，所谓研究函数就是研究函数的变化率．对于多变量函数，也是同样的情况．可是，由于在高维欧氏空间中，变点向一个固定点趋近的方式异常复杂，我们只能讨论变点沿着一条射线的方向趋向于定点时函数的变化率，这就是所谓的“方向导数”．

§ 14.1　方向导数和偏导数

若 f 是一个单变量函数，x_0 是 f 的定义域中的一个内点，那么 f 在 x_0 处的导数被定义为

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},$$

当然这时应假定上式右边的极限存在且有限．

在多变量函数的情形，即使把 x_0 与 h 改为向量，对应的表达式也没有任何意义，这是因为这时 $\boldsymbol{h}$ 是一个向量，而我们没有定义过“被向量 $\boldsymbol{h}$ 相除”的运算．

设开集 $D\subset\mathbf{R}^n$，函数 f：$D\to\mathbf{R}$．空间 $\mathbf{R}^n$ 中的任何单位向量 $\boldsymbol{u}$（即 $\boldsymbol{u}$ 满足 $\|\boldsymbol{u}\|=1$）叫做一个**方向**，这就是说，$\mathbf{R}^n$ 中单位球上的任何一个点都代表一个方向．给定一点 $\boldsymbol{x}_0\in D$ 和一个方向 $\boldsymbol{u}$，通过点 $\boldsymbol{x}_0$ 与 $\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{u}$ 的直线被称为**过点 $\boldsymbol{x}_0$ 具有方向 $\boldsymbol{u}$ 的直线**，也就是说点集

$$\{\boldsymbol{x}:\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0+t\boldsymbol{u},\text{其中 } t\in\mathbf{R}\}$$

就组成这条直线．

定义 14.1　设开集 $D\subset\mathbf{R}^n$，f：$D\to\mathbf{R}$，$\boldsymbol{u}$ 是一个方向，$\boldsymbol{x}_0\in D$．如果极限

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(\boldsymbol{x}_0+t\boldsymbol{u})-f(\boldsymbol{x}_0)}{t}\tag{1}$$

存在且有限，那么称这个极限是函数 f 在点 $\boldsymbol{x}_0$ 处**沿方向 $\boldsymbol{u}$ 的方向导数**，记为 $\dfrac{\partial f}{\partial\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}_0)$．

很明显，若令 $\varphi(t)=f(\boldsymbol{x}_0+t\boldsymbol{u})$，那么单变量函数 φ 当 $|t|$ 充分小时有定义，而极限(1)正是函数 φ 在 $t=0$ 处的导数 $\varphi'(0)$.

如果 $\boldsymbol{u}$ 是一个方向，即 $\|\boldsymbol{u}\|=1$，那么由于 $\|-\boldsymbol{u}\|=\|\boldsymbol{u}\|=1$，可见 $-\boldsymbol{u}$ 也是一个方向，这时我们有

$$\frac{f(\boldsymbol{x}_0+t(-\boldsymbol{u}))-f(\boldsymbol{x}_0)}{t}=-\frac{f(\boldsymbol{x}_0+(-t)\boldsymbol{u})-f(\boldsymbol{x}_0)}{-t}.$$

在上式双方令 $t\to 0$，便可看出在同一点 $\boldsymbol{x}_0$ 处函数 f 沿方向 $\boldsymbol{u}$ 与沿方向 $(-\boldsymbol{u})$ 的方向导数有相等的绝对值但有相反的符号.

例 1　考察二元函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0);\\ 1, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

这时任何方向 $\boldsymbol{u}$ 都可以表示为 $\boldsymbol{u}=(\cos\theta,\sin\theta)$ 的形式，这里 $0\leqslant\theta<2\pi$. 取 $\boldsymbol{x}_0=(0,0)$，当 $t\neq 0$ 时有

$$\varphi(t)=f(\boldsymbol{x}_0+t\boldsymbol{u})=f(t\cos\theta,t\sin\theta)=2\cos\theta\sin\theta=\sin 2\theta,$$

而 $\varphi(0)=1$，由此可见，当 $\theta=\pi/4$ 与 $\theta=5\pi/4$ 时方向导数存在且等于零；而对其他的 θ 的值，函数 φ 在 $t=0$ 处不连续，因此 $\varphi'(0)$ 不存在. 这表明，所论函数 f 在(0,0)处只在两个方向

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right),\ \left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

上存在方向导数.　□

讨论下列单位坐标向量

$$\begin{aligned}\boldsymbol{e}_1&=(1,0,0,\cdots,0),\\ \boldsymbol{e}_2&=(0,1,0,\cdots,0),\\ &\cdots\cdots\\ \boldsymbol{e}_n&=(0,0,\cdots,0,1).\end{aligned}$$

称函数 f 在点 $\boldsymbol{x}_0$ 处沿方向 $\boldsymbol{e}_i$ 的方向导数为 f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处的第 i 个**一阶偏导数**，记作

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}_0)\quad 或\quad D_if(\boldsymbol{x}_0),$$

并称 $D_i=\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ 为**第 i 个偏微分算子**，$i=1,2,\cdots,n$.

我们指出，掌握了单变量函数的求导运算，那么求偏导数的运算就无需另起炉灶. 令 $\boldsymbol{x}_0=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，我们来计算 $D_1f(\boldsymbol{x}_0)$. 依定义(1)，有

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0)=D_1f(\boldsymbol{x}_0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(\boldsymbol{x}_0+t\boldsymbol{e}_1)-f(\boldsymbol{x}_0)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{f(x_1+t,x_2,\cdots,x_n)-f(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{t},$$

如果最后一个极限存在，它表示的正是只对第一个变数求导而视其余的变数为常数．一般地，在计算 $D_i f(\boldsymbol{x}_0)$的时候，只需对第 i 个变数求导同时视其余变数为常数，$i\in\{1,2,\cdots,n\}$．

例 2 考察三元函数 $f(x,y,z)=x^2+y+\cos(y^2z)$．

我们有

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=2x,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=1-2yz\sin(y^2z),$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=-y^2\sin(y^2z). \qquad \square$$

例 3 在 $\mathbf{R}^n$ 中，计算函数 $f(\boldsymbol{x})=\|\boldsymbol{x}\|$ 的偏导数．

设 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，那么

$$f(\boldsymbol{x})=(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)^{1/2},$$

因此当 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ 时，

$$D_i f(\boldsymbol{x})=\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)^{-1/2}\cdot 2x_i=\frac{x_i}{\|\boldsymbol{x}\|}(i=1,2,\cdots,n);$$

当 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 时，设 $\boldsymbol{u}$ 为任一给定的方向，这时

$$\frac{f(t\boldsymbol{u})-f(\boldsymbol{0})}{t}=\frac{\|t\boldsymbol{u}\|}{t}=\frac{|t|\,\|\boldsymbol{u}\|}{t}=\frac{|t|}{t},$$

上式当 $t\to 0$ 时极限不存在．特别地，f 在原点处的任何偏导数也不存在．

$\square$

对于二元函数的情形，让我们来看看偏导数的几何意义．设区域 $D\subset\mathbf{R}^2$，f: $D\to\mathbf{R}$．我们把这个二元函数写为 $z=f(x,y)$，其中$(x,y)\in D$．三维欧氏空间 $\mathbf{R}^3$ 中的点集

$$G(f)=\{(x,y,f(x,y)):(x,y)\in D\}$$

称为**函数 f 的图像**，它是一张展布在 D 上的曲面，平行于 z 轴的直线与它至多只有一个交点．

任取一点$(x_0,y_0)\in D$，平面 $y=y_0$ 与曲面 $z=f(x,y)$交出一条平面曲线，它的方程是

$$\begin{cases} z=f(x,y), \\ y=y_0, \end{cases}$$

也可以写成

$$\begin{cases} z=f(x,y_0), \\ y=y_0. \end{cases}$$

按定义，偏导数$\frac{\partial}{\partial x}f(x_0,y_0)$是一元函数$f(x,y_0)$在点$x_0$处对$x$的导数，于是按一元函数导数的几何意义得知，$\frac{\partial}{\partial x}f(x_0,y_0)$正是上述曲线在点$(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$处的切线的斜率．同理，偏导数$\frac{\partial}{\partial y}f(x_0,y_0)$是平面曲线

$$\begin{cases} z=f(x_0,y), \\ x=x_0 \end{cases}$$

在点$(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$处的切线的斜率．

综上所述，计算函数$f(x_1,\cdots,x_n)$的n个偏导数不需要新的技术，但按(1)计算对某一方向的方向导数却不是一件易事，我们将在 § 14.4 中给出用n个偏导数来计算方向导数的公式。

练习题　14.1

1．求方向导数：

(1) 设函数$f(x,y)=xy$，计算函数f在点$(1,1)$处沿方向$\boldsymbol{u}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$的方向导数．

(2) 设$f(x,y)=(x-1)^2-y^2$，方向$\boldsymbol{u}=\left(\frac{3}{5},\ -\frac{4}{5}\right)$．求$f$在点$(0,1)$处沿方向$\boldsymbol{u}$的方向导数．

2．设函数$f(x,y)=\sqrt{|x^2-y^2|}$．问：在坐标原点处沿哪些方向f的方向导数存在？

3．设

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2>0; \\ 0, & x^2+y^2=0. \end{cases}$$

问：在坐标原点处沿哪些方向f的方向导数存在？

4．设函数$f(x,y,z)=|x+y+z|$．问在平面$x+y+z=0$上的每一点处，沿怎样的方向f存在着方向导数？

5．计算偏导数：

(1) 设$f(x,y)=x+y+\sqrt{x^2+y^2}$，求$\frac{\partial f}{\partial x}(0,1)$，$\frac{\partial f}{\partial y}(0,1)$，$\frac{\partial f}{\partial x}(1,2)$，$\frac{\partial f}{\partial y}(1,2)$．

(2) 设 $f(x,y)=\log(1+xy)+3$，求 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,2)$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,2)$.

(3) 设 $f(x,y)=\mathrm{e}^{x+y^2}+\sin(x^2y)$，求 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1)$ 和 $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1)$.

6. 计算偏导数：

(1) $z=xy+\dfrac{x}{y}$；　(2) $z=\tan\dfrac{x^2}{y}$；

(3) $z=x^y$；　(4) $z=\log(x+y^2)$；

(5) $z=\arctan\dfrac{y}{x}$；　(6) $z=\sin(xy)$；

(7) $u=\mathrm{e}^{x(x^2+y^2+z^2)}$；　(8) $z=\mathrm{e}^{xyz}$；

(9) $u=x^{yz}$；　(10) $u=\log(x+y^2+z^3)$；

(11) $z=\log(x_1+x_2+\cdots+x_n)$；　(12) $z=\arcsin(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)$.

§ 14.2　多变量函数的微分

设开集 $D\subset\mathbf{R}^n$，f: $D\to\mathbf{R}$. 取定一点 $\boldsymbol{x}_0\in D$，$\boldsymbol{h}\in\mathbf{R}^n$，由于 $\boldsymbol{x}_0$ 是 D 的一个内点，故当 $\|\boldsymbol{h}\|$ 充分小时可以使 $\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h}$ 完全在 D 之内.

类比上册中 § 4.1 关于单变量函数的微分的定义，我们给出

定义 14.2　设 $\boldsymbol{h}=(h_1,h_2,\cdots,h_n)$，如果成立着

$$f(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{x}_0)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_ih_i+o(\|\boldsymbol{h}\|),\quad \|\boldsymbol{h}\|\to 0,\tag{1}$$

式中 λ_1，λ_2，$\cdots$，λ_n 是不依赖于 $\boldsymbol{h}$ 的常数，那么称函数 f 在点 $\boldsymbol{x}_0$ 处**可微**，并称 $\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_ih_i$ 为 f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处的**微分**，记作

$$\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_ih_i.\tag{2}$$

如果 f 在开集 D 上的每一点都可微，则称 f 是 D 上的**可微函数**.

从公式(1)可见，微分 $\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0)$ 是函数的改变量的主要部分，它是自变量之改变量 $\boldsymbol{h}$ 的分量的齐次线性函数. 从这个意义上来说，多变量函数的微分与单变量函数的微分的定义是一致的. 利用(2)中的记号，可将(1)改写为

$$f(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{x}_0)=\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0)+o(\|\boldsymbol{h}\|),\quad \|\boldsymbol{h}\|\to 0.$$

设 f 在点 $\boldsymbol{x}_0=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 处可微，让我们来看看(2)式右边的系数 λ_1，λ_2，$\cdots$，λ_n 究竟是什么. 为此，令 $\boldsymbol{h}=(h_1,0,\cdots,0)$，这时(1)变为

$$f(x_1+h_1,x_2,\cdots,x_n)-f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\lambda_1h_1+o(|h_1|),$$

由此可得

$$\frac{f(x_1+h_1,x_2,\cdots,x_n)-f(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{h_1}=\lambda_1+o(1),$$

令 $h_1\to0$，得出

$$\lambda_1=D_1f(\boldsymbol{x}_0),$$

一般地，我们有

$$\lambda_i=D_if(\boldsymbol{x}_0),\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ n.$$

这表明，当函数 f 在点 $\boldsymbol{x}_0$ 处可微时，f 必有一切一阶偏导数，并且

$$\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_i}h_i.$$

定理 14.1 设 f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处可微，则 f 必在 $\boldsymbol{x}_0$ 处连续.

证明 如果 f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处可微，那么(1)式成立. 当 $\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}$ 时，有 $h_i\to0\ (i=1,2,\cdots,n)$，这时 $|\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0)|=\left|\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_ih_i\right|\to0$，由(1)可知，只要取 $\|\boldsymbol{h}\|$ 充分小就可使得 $|f(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{x}_0)|$ 任意小，所以 f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处连续. □

在单变量函数的情形，函数在一点处有导数，那么在此点必可微分，而且其微分系数正好是它在这点的一阶导数值. 但是，在多元函数的场合，情形大不相同，具体地说，诸偏导数的存在，不能保证函数在一点的可微性. 请看下列例子.

例 1 研究二元函数

$$f(\boldsymbol{p})=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \boldsymbol{p}=(x,y)\neq(0,0);\\ 0, & \boldsymbol{p}=(0,0).\end{cases}$$

由 f 的定义看出

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}=\frac{\partial f(0,0)}{\partial y}=0,$$

但在 § 13.7 的例 7 中，已经指明 f 在(0,0)处不连续，因此 f 在点(0,0)处不可微. □

由此例可以看到，即使全部一阶偏导数存在，也不能保证多变量函数在一点的可微性.

我们令

$$Jf(\boldsymbol{x})=(D_1f(\boldsymbol{x}),D_2f(\boldsymbol{x}),\cdots,D_nf(\boldsymbol{x})),$$

并称它为**函数 f 在点 $\boldsymbol{x}$ 处的 Jacobian**，它的地位和作用相当于单变量函数的一阶导数.

从此往后，我们把 $\mathbf{R}^n$ 中的点 $\boldsymbol{x}$ 的分量写成列向量，即

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},$$

以利于今后的矩阵表示，$\boldsymbol{x}$ 的改变量 $\boldsymbol{h}$ 同样也写成 $n\times 1$ 矩阵

$$\boldsymbol{h}=\begin{pmatrix}h_1\\h_2\\\vdots\\h_n\end{pmatrix},$$

这种写法的唯一缺点是多占一点篇幅.这样,函数的微分可以利用矩阵的乘法表示为

$$\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0)=Jf(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{h}. \tag{3}$$

函数 f 的 Jacobian 也常记为 $\operatorname{grad}f$（或 ∇f），即

$$\operatorname{grad}f(\boldsymbol{x})=Jf(\boldsymbol{x}),$$

称之为数量函数 f 的**梯度**(gradient).

可微的定义可以改成下列等价的形式，这种形式在使用的时候比较方便.

定理 14.2 函数 f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处可微当且只当下面的等式成立：

$$f(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{x}_0)=Jf(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{h}+\sum_{i=1}^{n}\beta_i(\boldsymbol{h})h_i,$$

当 $\|\boldsymbol{h}\|\to 0$ 时,

$$\beta_i(\boldsymbol{h})\to 0, i=1,2,\cdots,n.$$

证明 1° **充分性**

当 $\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}$ 时，显然有

$$\frac{1}{\|\boldsymbol{h}\|}\left|\sum_{i=1}^{n}\beta_i(\boldsymbol{h})h_i\right|=\left|\sum_{i=1}^{n}\beta_i(\boldsymbol{h})\frac{h_i}{\|\boldsymbol{h}\|}\right|\leqslant\sum_{i=1}^{n}\left|\beta_i(\boldsymbol{h})\right|\to 0.$$

因此

$$\sum_{i=1}^{n}\beta_i(\boldsymbol{h})h_i=o(\|\boldsymbol{h}\|).$$

按照定义 14.2，函数 f 在点 $\boldsymbol{x}_0$ 处可微.

2° **必要性**

设 f 在定义 14.2 意义之下可微. 记

$$r(\boldsymbol{h})=f(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{x}_0)-Jf(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{h},$$

当 $\|\boldsymbol{h}\|\to 0$ 时，$r(\boldsymbol{h})=o(\|\boldsymbol{h}\|)$. 因为

$$r(\boldsymbol{h})=\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{h_i}{\|\boldsymbol{h}\|}h_i\right)\frac{r(\boldsymbol{h})}{\|\boldsymbol{h}\|},$$

令

$$\beta_i(\boldsymbol{h})=\frac{r(\boldsymbol{h})}{\|\boldsymbol{h}\|}\frac{h_i}{\|\boldsymbol{h}\|},\quad i=1,2,\cdots,n,$$

由于

$$\left|\frac{h_i}{\|\boldsymbol{h}\|}\right|\leqslant 1\quad(i=1,2,\cdots,n),$$

显然可见 $\beta_i(\boldsymbol{h})\to 0\,(i=1,2,\cdots,n)$，并且

$$f(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{x})=Jf(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{h}+\sum_{i=1}^{n}\beta_i(\boldsymbol{h})h_i. \quad \square$$

下面的定理给出了函数 f 在一点可微的一个充分条件. 我们首先给出

定义 14.3 设开集 $D\subset\mathbf{R}^n$，点 $\boldsymbol{x}_0\in D$，包含着点 $\boldsymbol{x}_0$ 的任一开集称为点 $\boldsymbol{x}_0$ 的一个**邻域**.

定理 14.3 设开集 $D\subset\mathbf{R}^n$，函数 f: $D\to\mathbf{R}$，点 $\boldsymbol{x}_0\in D$. 如果 $D_i f(\boldsymbol{x})$，$i=1, 2, \cdots, n$，在 $\boldsymbol{x}_0$ 的一个邻域中存在且在点 $\boldsymbol{x}_0$ 处连续，则 f 在点 $\boldsymbol{x}_0$ 处可微.

证明 对维数 n 作归纳法. 当 $n=1$ 时，结论显然成立，因为单变量函数的导数存在就意味着可微. 设定理对于 $n-1$ 维是正确的.

我们把差 $f(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{x}_0)$分成两部分:

$$f(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{x}_0)=K_1+K_2, \tag{4}$$

式中

$$K_1=f(x_1+h_1,\cdots,x_n+h_n)-f(x_1+h_1,\cdots,x_{n-1}+h_{n-1},x_n),$$
$$K_2=f(x_1+h_1,\cdots,x_{n-1}+h_{n-1},x_n)-f(x_1,\cdots,x_n).$$

对 K_1 运用一元微分中值定理，得到

$$K_1=\frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1+h_1,\cdots,x_{n-1}+h_{n-1},x_n+\theta h_n)h_n,$$

其中 $\theta\in(0,1)$，再把 K_1 改写成

$$K_1=\frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}_0)h_n+r_1,$$

式中

$$\begin{aligned}r_1&=\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1+h_1,\cdots,x_{n-1}+h_{n-1},x_n+\theta h_n)-\frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}_0)\right)h_n\\&=\beta_n(\boldsymbol{h})h_n,\end{aligned}$$

由偏导数$\dfrac{\partial f}{\partial x_n}$在 $\boldsymbol{x}_0$ 处的连续性可知，当 $\|\boldsymbol{h}\|\to 0$ 时，

$$\beta_n(\boldsymbol{h})\to 0.$$

于是

$$K_1 = \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}_0) h_n + \beta_n(\boldsymbol{h}) h_n. \tag{5}$$

把归纳假设用到 K_2 上，根据定理 14.2 可得

$$K_2 = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}_0) h_i + \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i(\boldsymbol{h}) h_i, \tag{6}$$

当 $\|\boldsymbol{h}\| \to 0$ 时，

$$\beta_i(\boldsymbol{h}) \to 0,\ i = 1, \cdots, n-1.$$

从(4)，(5)，(6)即得

$$f(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}_0) h_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_i(\boldsymbol{h}) h_i,$$

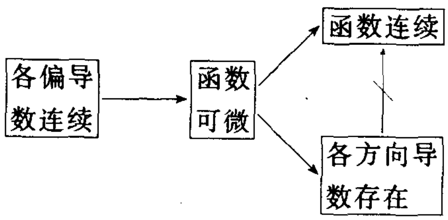
其中　$\beta_i(\boldsymbol{h}) \to 0\ (\|\boldsymbol{h}\| \to 0)$，$i = 1, \cdots, n$. 再用一次定理 14.2，即知 f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处可微。　□

必须注意，偏导数连续仅仅是函数可微的一个充分条件，并不必要. 例如二元函数

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)\sin \dfrac{1}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0,0); \\ 0, & (x, y) = (0,0) \end{cases}$$

在(0,0)点可微，但它的两个偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x}$，$\frac{\partial f}{\partial y}$ 在(0,0)处并不连续. 请读者作为练习来证明这一结论.

综上所述，函数的偏导数和函数的连续性与可微性之间有如下关系：



为了叙述方便，我们以后采用下述术语：

设 D 是 $\mathbf{R}^n$ 中一个区域，f: $D \to \mathbf{R}$. 如果 f 的各个偏导数都在 D 中连续，我们就说 f 在区域 D 上**连续可微**. 由 D 上全体连续可微的函数组成的集合记成 $C^1(D)$，由 D 上全体连续函数组成的集合记成 $C^0(D)$.

练习题　14.2

1. 设

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & x^2+y^2>0;\\ 0, & x=y=0.\end{cases}$$

求证：函数 f 在原点处各个方向导数存在，但在原点处 f 不可微.

2. 求证：函数 $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$ 在原点处不可微.

3. 用可微的定义证明：函数 $f(x,y)=xy$ 在 $\mathbf{R}^2$ 的每一点处可微.

4. 求下列函数在指定点处的微分：

(1) $f(x,y)=x^2+2xy-y^2$ 在点 $(1,2)$ 处；

(2) $f(x,y,z)=\log(x+y-z)+\mathrm{e}^{x+y}\sin z$ 在点 $(1,2,1)$ 处；

(3) $u=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$ 在点 $(t_1,t_2,\cdots,t_n)$ 处，其中 $t_1^2+t_2^2+\cdots+t_n^2>0$；

(4) $u=\sin(x_1+x_2^2+\cdots+x_n^n)$ 在点 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 处.

5. 计算函数 f 的 Jacobian Jf，设：

(1) $f(x,y)=x^2y^3$；

(2) $f(x,y,z)=x^2y\sin(yz)$；

(3) $f(x,y,z)=x\cos(y-3z)+\arcsin(xy)$；

(4) $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)^{1/2}$.

问题　14.2

设函数 f 在 $\mathbf{R}^n$ 的凸区域 D 上可微，求证：f 是 D 上的凸函数的必要充分条件是：不等式

$$f(\boldsymbol{b})-f(\boldsymbol{a})\geqslant Jf(\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$$

对一切 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}\in D$ 成立.

---

§14.3　映射的微分

设开集 $D\subset\mathbf{R}^n$，映射 $\boldsymbol{f}:D\to\mathbf{R}^m$. 设 $\boldsymbol{f}$ 的分量依次是 $f_1,f_2,\cdots,f_m$，我们写作

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\begin{pmatrix}f_1(\boldsymbol{x})\\ f_2(\boldsymbol{x})\\ \vdots\\ f_m(\boldsymbol{x})\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{x}\in D.$$

设点 $\boldsymbol{x}_0\in D$，$\boldsymbol{h}\in\mathbf{R}^n$，由于 $\boldsymbol{x}_0$ 是 D 的内点，因此总可以取 $\|\boldsymbol{h}\|$ 充分小，使

得 $\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h}\in D$.

定义 14.4 如果映射 $\boldsymbol{f}$ 适合

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{h}+\boldsymbol{r}(\boldsymbol{h}), \tag{1}$$

式中 $\boldsymbol{A}$ 是一个 $m\times n$ 矩阵，它的元素不依赖于 $\boldsymbol{h}$，并且

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}}\frac{\|\boldsymbol{r}(\boldsymbol{h})\|}{\|\boldsymbol{h}\|}=0, \tag{2}$$

这时称映射 $\boldsymbol{f}$ 在点 $\boldsymbol{x}_0$ 处**可微**，并称 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{h}$ 是 $\boldsymbol{f}$ 在点 $\boldsymbol{x}_0$ 处的**微分**，记作

$$\mathrm{d}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{h}. \tag{3}$$

请注意，在式(2)中，左边分子的范数是 m 维欧氏空间中的范数，而分母的范数是 n 维欧氏空间中的范数.

由定义 14.4 看出，在一个可微的点上，映射的增量的主要部分是一个线性映射 A 作用于向量 $\boldsymbol{h}$.

我们来看看在可微的情形，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中的元素究竟是些什么. 为此，设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix},$$

比较(1)式两边的第 i 个分量，得到

$$f_i(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h})-f_i(\boldsymbol{x}_0)=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}h_j+r_i(\boldsymbol{h}), \tag{4}$$

(4)中的最后一项表示 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{h})$ 的第 i 个分量. 由于(2)式成立当且只当

$$r_i(\boldsymbol{h})=o(\|\boldsymbol{h}\|),\ \boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0},$$

$i=1,2,\cdots,m$，可见映射 $\boldsymbol{f}$ 在点 $\boldsymbol{x}_0$ 处可微，当且只当它的所有分量函数在 $\boldsymbol{x}_0$ 处可微，因此由(4)立即得到

$$a_{ij}=\frac{\partial f_i(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_j},$$

$i=1,2,\cdots,m$; $j=1,2,\cdots,n$. 我们记

$$Jf(\boldsymbol{x}_0)=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_n}\\ \vdots & & \vdots\\ \dfrac{\partial f_m(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_n}\end{pmatrix},$$

称之为映射 $\boldsymbol{f}$ 在点 $\boldsymbol{x}_0$ 处的 Jacobian，它是一个 $m\times n$ 矩阵. 于是

$$\mathrm{d}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)=Jf(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{h}. \tag{5}$$

总而言之，映射的微分就是自变量的改变量 $\boldsymbol{h}$ 的一个线性映射，无论是对单变量函数，还是对多变量函数，这一观点都是适用的. 映射的 Jacobian

就是它的“导数”.

前面已经说过，映射 f 在一点 x_0 处的可微性等价于它的所有分量函数在点 x_0 处的可微性，因此，由定理 14.3 可以立即推出

定理 14.4 若映射 f 在开集 D 上存在 Jacobian Jf，且 Jf 的各元素在点 x_0 处连续，则映射 f 在点 x_0 处可微.

由上述定理可见，偏导数的连续性对映射有着重要的影响.

和 § 14.2 末尾提到的一样，我们有下面的定义.

定义 14.5 设开集 $D\subset\mathbf{R}^n$，映射 f: $D\to\mathbf{R}^m$. 如果 f 在 D 上的每一点都连续，则记 $f\in C^0(D)$；如果 Jf 在 D 上的每一点都连续，则记 $f\in C^1(D)$.

设 $f\in C^1(D)$，由定理 14.4 可知，f 在 D 上每一点都可微，因此 f 在 D 上的每一点都连续，这说明 $f\in C^0(D)$. 也就是说，若 $f\in C^1(D)$，则 $f\in C^0(D)$.

练习题 14.3

1. 在指定点处计算下列映射的 Jacobian 和微分：

(1) $f(x,y)=(xy^2-3x^2,3x-5y^2)$，在点 $(1,-1)$ 处；

(2) $f(x,y,z)=(xyz^2-4y^2,3xy^2-y^2z)$，在点 $(1,-2,3)$ 处；

(3) $f(x,y)=(e^x\cos(xy),e^x\sin(xy))$，在点 $\left(1,\ \frac{\pi}{2}\right)$ 处.

2. 计算下列映射的 Jacobian：

(1) $f(r,\theta)=(r\cos\theta,r\sin\theta)$；

(2) $f(r,\theta,z)=(r\cos\theta,r\sin\theta,z)$；

(3) $f(r,\theta,\varphi)=(r\sin\theta\cos\varphi,r\sin\theta\sin\varphi,r\cos\theta)$.

3. 设区域 $D\subset\mathbf{R}^n$，映射 f，g：$D\to\mathbf{R}^m$，求证：

(1) $J(cf)=cJf$，其中 c 为常数；

(2) $J(f+g)=Jf+Jg$；

(3) 当 $m=1$ 时，有 $J(fg)=gJf+fJg$；

(4) 当 $m>1$ 时，则有

$$J(f,g)=g(Jf)+f(Jg),$$

这里，上式左边圆括号表示欧氏空间 $\mathbf{R}^m$ 中的内积，而右边涉及 $1\times m$ 矩阵同 $m\times n$ 矩阵相乘.

4. 设 f: $[a,b]\to\mathbf{R}^n$，并且对一切 $t\in[a,b]$，有 $\|f(t)\|=$ 常数. 求证：$(Jf,f)=0$，并对此式作出几何解释.

5. 设 α，β，γ 为 $\mathbf{R}$ 上的连续函数，求出一个由 $\mathbf{R}^3$ 到 $\mathbf{R}^3$ 的可微映射 f，使得

$$Jf(x,y,z)=\begin{pmatrix}\alpha(x) & 0 & 0\\ 0 & \beta(y) & 0\\ 0 & 0 & \gamma(z)\end{pmatrix}.$$

6. 映射 f: $\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$，如果条件

$$f(\lambda x+\mu y)=\lambda f(x)+\mu f(y)$$

对一切 x，$y\in\mathbf{R}^n$ 和一切 λ，$\mu\in\mathbf{R}$ 成立，则称 f 是**一线性映射**.

证明：

(1) $f(\mathbf{0})=\mathbf{0}$;

(2) $f(-x)=-f(x)$，$x\in\mathbf{R}^n$;

(3) 映射 f 由 $f(e_1)$，$f(e_2)$，…，$f(e_n)$ 完全确定，其中 e_1，e_2，…，e_n 是 $\mathbf{R}^n$ 中的单位坐标向量.

7. 设 f: $\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$ 为一线性映射，试求 Jf.

8. 设 E: $\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 适合：对一切 $x\in\mathbf{R}^n$ 有 $E(x)=x$，称 E 为 $\mathbf{R}^n$ 中的**恒等映射**. 求证：E 是一个线性映射，并且 $JE=I_n$，这里 I_n 表示 n 阶单位方阵.

§ 14.4 复合求导

在单变量函数的微分学中，有“复合函数的求导公式”，就是所谓的“链式法则”. 当前讨论映射的“导数”，也有完全相似的链式法则.

我们有

定理 14.5 设开集 $D\subset\mathbf{R}^n$，f: $D\to\mathbf{R}^m$，f 在点 $x_0\in D$ 上可微. 又设 g 把包含 $f(D)$ 的一个开集映射至 $\mathbf{R}^l$，并且 g 在点 $f(x_0)$ 上可微. 那么复合映射 $g\circ f$ 在点 x_0 处可微，并且

$$J(g\circ f)(x_0)=Jg(f(x_0))Jf(x_0). \tag{1}$$

证明 置 $y_0=f(x_0)$，$A=Jf(x_0)$，$B=Jg(y_0)$，易见 A 是 $m\times n$ 矩阵而 B 是 $l\times m$ 矩阵.

如果能证明

$$\lim_{\|h\|\to 0}\frac{\|(g\circ f)(x_0+h)-(g\circ f)(x_0)-BAh\|}{\|h\|}=0, \tag{2}$$

那么按照定义 14.4，便知 $J(g\circ f)(x_0)=BA$，此即(1). 因 f，g 分别在 x_0 和 y_0 处可微，故有

$$f(x_0+h)-f(x_0)=Ah+u(h), \tag{3}$$

其中 $\frac{\|u(h)\|}{\|h\|}\to 0$，当 $\|h\|\to 0$ 时.

$$g(y_0+k)-g(y_0)=Bk+v(k),\tag{4}$$

其中 $\frac{\|v(k)\|}{\|k\|}\to 0$，当 $\|k\|\to 0$ 时.

记

$$\frac{\|u(h)\|}{\|h\|}=\varepsilon(h),\quad \frac{\|v(k)\|}{\|k\|}=\eta(k),$$

则

$$\|u(h)\|=\varepsilon(h)\|h\|,\qquad \|v(k)\|=\eta(k)\|k\|,\tag{5}$$

且

$$\lim_{\|h\|\to 0}\varepsilon(h)=0,\qquad \lim_{\|k\|\to 0}\eta(k)=0.\tag{6}$$

对于给定的 h，命 $k=f(x_0+h)-f(x_0)$，那么由(3)和(5)得

$$\|k\|\leqslant\|Ah\|+\|u(h)\|\leqslant(\|A\|+\varepsilon(h))\|h\|.\tag{7}$$

这里我们已经利用了 § 13.1 的不等式(4). 现在由(4)，(5)和(7)得

$$\begin{aligned}
&\|(g\circ f)(x_0+h)-g\circ f(x_0)-BAh\|\\
=&\|g(f(x_0+h))-g(f(x_0))-BAh\|\\
=&\|g(y_0+k)-g(y_0)-BAh\|\\
=&\|Bk+v(k)-BAh\|\\
=&\|B(k-Ah)+v(k)\|\\
\leqslant&\|Bu(h)\|+\eta(k)\|k\|\\
\leqslant&\|B\|\varepsilon(h)\|h\|+\eta(k)(\|A\|+\varepsilon(h))\|h\|.
\end{aligned}$$

所以

$$\frac{\|(g\circ f)(x_0+h)-g\circ f(x_0)-BAh\|}{\|h\|}\leqslant\|B\|\varepsilon(h)+(\|A\|+\varepsilon(h))\eta(k),$$

由(6)即得(2). 这就是我们要证明的. □

我们可以把公式(1)明确地写出来. 下面的示意图:

$$(x_1,x_2,\cdots,x_n)\xrightarrow{f}(y_1,y_2,\cdots,y_m)\xrightarrow{g}(z_1,z_2,\cdots,z_l)$$

表示的意思是：映射 f 把 $\mathbf{R}^n$ 中开集 D 中的点$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$映成 $\mathbf{R}^m$ 中的点$(y_1,y_2,\cdots,y_m)$，接着再被映射 g 映成 $\mathbf{R}^l$ 中的点$(z_1,z_2,\cdots,z_l)$，这时公式(1)可以通过矩阵具体地写为

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial z_1}{\partial x_1}&\cdots&\frac{\partial z_1}{\partial x_n}\\ \vdots&&\vdots\\ \frac{\partial z_l}{\partial x_1}&\cdots&\frac{\partial z_l}{\partial x_n}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial z_1}{\partial y_1}&\cdots&\frac{\partial z_1}{\partial y_m}\\ \vdots&&\vdots\\ \frac{\partial z_l}{\partial y_1}&\cdots&\frac{\partial z_l}{\partial y_m}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial y_1}{\partial x_1}&\cdots&\frac{\partial y_1}{\partial x_n}\\ \vdots&&\vdots\\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1}&\cdots&\frac{\partial y_m}{\partial x_n}\end{pmatrix}.\tag{8}$$

下面看若干具体的例子.

例 1 设 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是一个 n 元连续可微函数，其中每一个变元 x_i 又是单变数 t 的可微函数 $x_i(t)$，$i=1, 2, \cdots, n$，令 $\varphi(t) = f(x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t))$，于是按照公式(8)，可得

$$\varphi'(t) = \frac{\mathrm{d}\varphi(t)}{\mathrm{d}t} = Jf(x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)) \begin{pmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \\ \vdots \\ x'_n(t) \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)) x'_i(t). \quad \square$$

利用例 1 容易得到通过偏导数来计算方向导数的公式。

定理 14.6 开集 $D \subset \mathbf{R}^n$，f：$D \to \mathbf{R}$，设函数 f 在点 $\boldsymbol{x}_0$ ($\boldsymbol{x}_0 \in D$)处可微，$\boldsymbol{u} = (u_1, \cdots, u_n)$ 是一个方向，那么 f 在点 $\boldsymbol{x}_0$ 处沿方向 $\boldsymbol{u}$ 的方向导数为

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}_0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0) u_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}_0) u_n. \tag{9}$$

证明 命 $\varphi(t) = f(\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{u})$，由 § 14.1 知道

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}_0) = \varphi'(0).$$

由例 1 知道 $\varphi'(0)$就等于(9)的右端. $\square$

特别地，对于二元函数 $f(x, y)$，在点(x_0, y_0)处沿方向$(\cos\theta, \sin\theta)$的方向导数是

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\sin\theta.$$

对于三元函数 $f(x, y, z)$，一个方向可以用方向余弦$(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$来表示，其中$(\alpha, \beta, \gamma)$是这一方向的**方向角**. 这时沿这个方向的方向导数是

$$\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma.$$

例 2 设二元函数

$$u = f(x+y+z, x^2+y^2+z^2)$$

有连续的一阶偏导数，求 u 的所有的一阶偏导数.

解 讨论函数和映射的复合

$$u = f(\xi, \eta), \quad \begin{cases} \xi = x+y+z, \\ \eta = x^2+y^2+z^2. \end{cases}$$

于是

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial \xi}(x+y+z, x^2+y^2+z^2) + 2x\frac{\partial f}{\partial \eta}(x+y+z, x^2+y^2+z^2),$$

对称地可以得出$\dfrac{\partial u}{\partial y}$与$\dfrac{\partial u}{\partial z}$的表达式． □

例 3　设两个二元函数

$$\begin{cases} x=\varphi(s,t), \\ y=\psi(s,t) \end{cases}$$

在(s_0,t_0)处可微且 $x_0=\varphi(s_0,t_0)$，$y_0=\psi(s_0,t_0)$，再设二元函数 $u=f(x,y)$ 在(x_0,y_0)可微，试求复合函数

$$u=f(\varphi(s,t),\psi(s,t))$$

在(s_0,t_0)的两个偏导数．

解　写出下列图示：

$$(s,t)\to(x,y)\to u,$$

由复合求导公式

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial s} & \dfrac{\partial u}{\partial t} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \varphi}{\partial s} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial t} \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial s} & \dfrac{\partial \psi}{\partial t} \end{pmatrix}, \tag{10}$$

代入(s_0,t_0)，得到

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial s} & \dfrac{\partial u}{\partial t} \end{pmatrix}\Bigg|_{(s_0,t_0)}=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}\Bigg|_{(x_0,y_0)}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \varphi}{\partial s} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial t} \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial s} & \dfrac{\partial \psi}{\partial t} \end{pmatrix}\Bigg|_{(s_0,t_0)} \qquad \Box$$

上面那个复合求导的计算，是用矩阵来表达的．大家知道，矩阵表达有紧凑、集成等优点．把矩阵等式(10)用通常的数量等式写出来就变成下列两个等式：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial s}=\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial \varphi}{\partial s}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial \psi}{\partial s}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial \varphi}{\partial t}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial \psi}{\partial t}. \end{cases} \tag{11}$$

如果我们只需计算(11)中$\dfrac{\partial u}{\partial s}$或$\dfrac{\partial u}{\partial t}$中的某一个，那么只记忆(11)中的单个公式比记忆矩阵等式(10)更为方便．“链式”这一特征使得公式(11)中的每一个都十分便于记忆，以(11)中的第一式为例，u 是 x 和 y 的函数，x，y 中的任何一个又是 s，t 的函数，所以 u 是 s 和 t 的函数．偏导数$\dfrac{\partial u}{\partial s}$就应当等于 u 对 x 求偏导数乘以 x 对 s 求偏导数，然后加上 u 对 y 求偏导数乘以 y 对 s 求偏导数．在多个中间变量的情形，也是如此．

例 4　设函数 $u(x,y)$有连续的一阶偏导数，又 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，

求证：

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2. \tag{12}$$

证明 先画出示意图

$$(r,\theta)\to(x,y)\to u,$$

由此得到

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial r} & \frac{\partial u}{\partial \theta}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{pmatrix},$$

于是

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial r} & \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}.$$

利用矩阵转置可得

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x}\\ \frac{\partial u}{\partial y}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x}\\ \frac{\partial u}{\partial y}\end{pmatrix}=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2. \quad \square$$

上面这个例子，通过矩阵运算技巧得到了等式(12). 也可直接应用公式(11)得

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta,$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}=-\frac{\partial u}{\partial x}\sin\theta+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\theta.$$

再求两式的平方和即得(12).

练习题 14.4

1. 设 $u=f(x^2+y^2)$，证明 $y\frac{\partial u}{\partial x}-x\frac{\partial u}{\partial y}=0$.

2. 设 $u=f(xy)$，证明 $x\dfrac{\partial u}{\partial x}-y\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$.

3. 设 $u=f\left(\log x+\dfrac{1}{y}\right)$，证明 $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y^2\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$.

4. 设 $u=f(\varphi(x)+\psi(y))$，证明 $\psi'(y)\dfrac{\partial u}{\partial x}=\varphi'(x)\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

5. 求 u 的一切偏导数，设：

(1) $u=f(x+y,xy)$；

(2) $u=f(x,xy,xyz)$；

(3) $u=f\left(\dfrac{x}{y},\dfrac{y}{z}\right)$.

6. 设 $u=f(x,y)$，当 $y=x^2$ 时有 $u=1$ 并且$\dfrac{\partial u}{\partial x}=x$，求$\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=x^2}$.

7. 设 $u=x^2y-xy^2$，且 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，求$\dfrac{\partial u}{\partial r}$，$\dfrac{\partial u}{\partial \theta}$.

8. 设 $f(x,y,z)=F(u,v,w)$，其中 $x^2=vw$，$y^2=wu$，$z^2=uv$.

求证：

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}=u\frac{\partial F}{\partial u}+v\frac{\partial F}{\partial v}+w\frac{\partial F}{\partial w}.$$

9. 求 $J\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{g}$，设：

(1) $\boldsymbol{f}(x,y)=(x,y,x^2y)$，$\boldsymbol{g}(s,t)=(s+t,s^2-t^2)$，在点(2,1)处；

(2) $\boldsymbol{f}(x,y)=(\varphi(x+y),\varphi(x-y))$，$\boldsymbol{g}(s,t)=(\mathrm{e}^t,\mathrm{e}^{-t})$；

(3) $\boldsymbol{f}(x,y,z)=(x^2+y+z,2x+y+z^2,0)$，$\boldsymbol{g}(u,v,w)=(uv^2w^2,w^2\sin v,u^2\mathrm{e}^v)$.

10. 设有函数 $f(x,y,z)$，$\boldsymbol{u}$ 是一个方向. 函数 f 沿方向 $\boldsymbol{u}$ 的方向导数记作$\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{u}}$.

设 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ 是 $\mathbf{R}^3$ 中的三个互相垂直的方向. 求证：

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{e}_1}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{e}_2}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{e}_3}\right)^2=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2.$$

§14.5　拟微分平均值定理

大家一定记得，在单变量函数微分学中，Lagrange 中值定理起着很重要的作用. 利用这个定理我们曾经证明，如果在一个开区间内函数 f 的导数等于零，那么 f 在这区间内必为常数；利用这个定理，可以通过函数的导数的正负来判断这个函数是递增的或是递减的. 现在，在讨论高维欧氏空间之间的映射

的时候，既然映射有与一元函数的导数相对应的东西——Jacobian，我们自然会问：有没有类似于 Lagrange 中值定理的定理成立？对于定义在凸区域上的可微函数，中值定理的确是正确的．我们有

定理 14.7 设定义在凸区域 $D\subset\mathbf{R}^n$ 上的函数 f 可微，则对任何两点 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}\in D$，在由 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 确定的直线段上有一点 ξ 使得

$$f(\boldsymbol{b})-f(\boldsymbol{a})=Jf(\boldsymbol{\xi})(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}).$$

证明 这线段上的点可以表示为 $\boldsymbol{a}+t(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$，这里 $t\in[0,1]$．令 $\varphi(t)=f(\boldsymbol{a}+t(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}))$，它是$[0,1]$上的可微函数．由单变量函数的微分中值定理可知，存在 $\theta\in(0,1)$，使得

$$\varphi(1)-\varphi(0)=\varphi'(\theta).$$

若记 $\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{a}+\theta(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$，则

$$\varphi'(\theta)=Jf(\boldsymbol{\xi})(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}),$$

由此立得所需的结论． □

到此，我们进一步提出问题：如果映射 $\boldsymbol{f}$ 在凸区域 $D\subset\mathbf{R}^n$ 上定义，并且 $\boldsymbol{f}$：$D\to\mathbf{R}^m$ 可微，是不是存在相应的微分中值定理？我们用下面的例子指出，即使对于 $n=1$ 和 $m=2$，这样的定理也不成立．

考察映射 $\boldsymbol{f}$：$[0,1]\to\mathbf{R}^2$，具体地说

$$\boldsymbol{f}(t)=\begin{pmatrix}t^2\\t^3\end{pmatrix},\quad t\in[0,1],$$

这时

$$Jf(t)=\begin{pmatrix}2t\\3t^2\end{pmatrix}.$$

如果这时“中值定理”成立，应有 $\theta\in(0,1)$使得 $\boldsymbol{f}(1)-\boldsymbol{f}(0)=Jf(\theta)(1-0)=Jf(\theta)$，也就是说必须有

$$\begin{pmatrix}2\theta\\3\theta^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},$$

这种 θ 显然是不存在的，从而得出矛盾．

但是，我们有

定理 14.8 设 $\boldsymbol{f}$：$[a,b]\to\mathbf{R}^m$ 并且映射$\boldsymbol{f}$ 在$[a,b]$上连续，在开区间(a,b)内可微，那么存在一点 $\xi\in(a,b)$使得

$$\|\boldsymbol{f}(b)-\boldsymbol{f}(a)\|\leqslant\|Jf(\xi)\|(b-a).$$

证明 设 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{f}(b)-\boldsymbol{f}(a)$，利用 $\mathbf{R}^m$ 中的内积来定义函数

$$\varphi(t)=\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{f}(t)\rangle,\qquad t\in[a,b],$$

易见 φ 是$[a,b]$上的连续函数并在开区间(a,b)上可微．对 φ 使用微分中值定理，可知存在一点 $\xi\in(a,b)$使得

$$\varphi(b)-\varphi(a)=(b-a)\varphi'(\xi)=(b-a)\langle \boldsymbol{u},\ Jf(\xi)\rangle,$$

另一方面

$$\begin{aligned}\varphi(b)-\varphi(a)&=\langle \boldsymbol{u},\ \boldsymbol{f}(b)\rangle-\langle \boldsymbol{u},\ \boldsymbol{f}(a)\rangle\\&=\langle \boldsymbol{u},\ \boldsymbol{f}(b)-\boldsymbol{f}(a)\rangle=\langle \boldsymbol{u},\boldsymbol{u}\rangle=\|\boldsymbol{u}\|^2,\end{aligned}$$

Cauchy-Schwarz 不等式给出

$$\|\boldsymbol{u}\|^2=(b-a)|\langle \boldsymbol{u},\ Jf(\xi)\rangle|\leqslant(b-a)\|\boldsymbol{u}\|\ \|Jf(\xi)\|,$$

当 $\boldsymbol{u}\neq\mathbf{0}$ 时，从上式双方消去 $\|\boldsymbol{u}\|$ 便得到

$$\|\boldsymbol{f}(b)-\boldsymbol{f}(a)\|\leqslant(b-a)\|Jf(\xi)\|.$$

注意，当 $\boldsymbol{u}=\mathbf{0}$ 时，上式自然也成立．这就是所需的结论．　□

下面的定理就是所谓的**拟微分平均值定理**．

定理 14.9　设凸域 $D\subset\mathbf{R}^n$ 且 $\boldsymbol{f}$: $D\to\mathbf{R}^m$，映射 $\boldsymbol{f}$ 在 D 上可微，则对于任何 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}\in D$，在由 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 所决定的线段上必有一点 $\boldsymbol{\xi}$ 使得

$$\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})\|\leqslant\|Jf(\boldsymbol{\xi})\|\ \|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\|.$$

证明　由 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 所决定的线段可以表示成

$$\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{a}+t(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}),\quad t\in[0,1].$$

令

$$\boldsymbol{g}(t)=\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{r}(t),\quad t\in[0,1].$$

映射 $\boldsymbol{g}$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可微．由复合函数求导可得

$$J\boldsymbol{g}(t)=Jf(\boldsymbol{r}(t))J\boldsymbol{r}(t)=Jf(\boldsymbol{r}(t))(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}),$$

利用定理 14.8，可知有 $\tau\in(0,1)$ 使得

$$\|\boldsymbol{g}(1)-\boldsymbol{g}(0)\|\leqslant\|J\boldsymbol{g}(\tau)\|.$$

由于

$$\begin{aligned}\boldsymbol{g}(1)&=\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{r}(1)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b}),\\\boldsymbol{g}(0)&=\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{r}(0)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}),\\J\boldsymbol{g}(\tau)&=Jf(\boldsymbol{r}(\tau))(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}),\end{aligned}$$

若令 $\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{r}(\tau)$——它是由 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 所决定的线段内的一点，我们有

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})\|&\leqslant\|Jf(\boldsymbol{\xi})(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})\|\\&\leqslant\|Jf(\boldsymbol{\xi})\|\ \|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\|,\end{aligned}$$

这样就得到了欲证的结果．　□

单变量函数的微分中值定理是通过等式表达的，而上述的拟微分平均值定理则是通过不等式表达的．不过，对于应用来说，后者几乎与前者同样地有用．

作为一个例子，我们来证明

定理 14.10　设区域 $D\subset\mathbf{R}^n$，$\boldsymbol{f}$: $D\to\mathbf{R}^m$，如果 $Jf=\mathbf{0}$ 在 D 上成立，则 $\boldsymbol{f}$ 在 D 上为一常向量．

证明 我们首先注意到，如果 $G\subset D$ 是一凸域，由定理 14.9 立知，f 在 G 上是一常向量.

现在任取一点 $\boldsymbol{x}_0\in D$，令

$$U=\{\boldsymbol{x}\in D:\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)\},$$

显然 U 不是空集. 我们来证明 U 是开集. 任取一点 $\boldsymbol{a}\in U\subset D$，由于 D 是开集，因此存在以 $\boldsymbol{a}$ 为球心的球 $B_1\subset D$，球 B_1 是凸域，所以 $\boldsymbol{f}$ 在 B_1 上是一常向量：对任何 $\boldsymbol{x}\in B_1$，有

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0),$$

这表明 $B_1\subset U$，所以 U 是开集. 同样也可证明 $D\cap U^c$ 是一开集，这是因为任取一点 $\boldsymbol{b}\in D\cap U^c$，由于 D 是开集，存在以 $\boldsymbol{b}$ 为球心的一个球 $B_2\subset D$，B_2 是一凸域，故 $\boldsymbol{f}$ 在 B_2 上也是常向量. 当 $\boldsymbol{x}\in B_2$ 时

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b}).$$

由于 $\boldsymbol{b}$ 不在 U 中，所以 B_2 中所有的点也不在 U 中，这表明 $B_2\subset(D\cap U^c)$，这就证明了 $D\cap U^c$ 也是开集. 由分解式

$$D=U\cup(D\cap U^c)$$

以及 D 是连通的开集和 $U\neq\varnothing$，必有 $D\cap U^c=\varnothing$，所以 $D=U$，即 $\boldsymbol{f}$ 在 D 上为一常向量. □

当 $m=1$ 时，我们有下面的

推论 设区域 $D\subset\mathbf{R}^n$，f: $D\to\mathbf{R}$. 如果

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=\frac{\partial f}{\partial x_2}=\cdots=\frac{\partial f}{\partial x_n}=0$$

在 D 上成立，那么 f 在 D 上是一常数。

请读者注意，定理 14.10 的证明，是利用连通性来做证明的一个很好的示范.

§ 14.6 隐函数定理

本节所讨论的问题，即隐函数存在的问题，不仅在数学分析这门课程中有着重要的意义，同时也在数学的其他分支，例如，方程式论、微分方程论等数学分支中，都有十分重要的应用.

实际上，§ 14.6，§ 14.7 和 § 14.8 是紧密相关的. 要想充分地掌握这三节的内容，最重要的是要很好地掌握定理 14.11 的结论的意义和证明的方法. 做到了这两点，就为学好这三节的具体内容奠定了牢固的基础.

在正式提出定理 14.11 之前，我们粗略地说说这个定理的基本意思．设 $D\subset \mathbf{R}^2$ 是一开集，F：$D\to\mathbf{R}$ 是一个含两个自变量 x 与 y 的函数．因此方程

$$F(x,y)=0 \tag{1}$$

就是对 D 中的点 (x,y) 施加了某一种限制．D 中适合这一限制的点的全体组成 D 内的一条曲线，方程(1)称为该曲线的**隐式方程**．我们已在本书上册第 8 章中提起过这一件事．

两种极端的情况必须注意：第一是如果这种限制过于苛刻，以致使得 D 中没有点能适合这一限制，这时(1)所定义的“曲线”实际上是空集；第二是如果(1)是一个恒等式，也就是说(1)实际上并不是一种限制，这时“曲线”由 D 中的所有的点组成．我们自然应当排除这两种极端情况．

设 $(x_0,y_0)\in D$ 并且使得 $F(x_0,y_0)=0$，我们的问题是，应当对二元函数 F 加上什么条件，以及在点 (x_0,y_0) 的邻近的怎样一个范围之内，方程(1)能确定可微的解 $y=f(x)$ 或 $x=g(y)$．通常，我们把上面的最后一句话通俗地表述为“从方程(1)中**解出** $y=f(x)$ 或 $x=g(y)$”．

我们应当着重指出，标明了黑体的“**解出**”二字，应理解为“**存在性**”，即存在着这样的可微函数，而不意味着**解出**的可操作性．

先看一个简单的例子．设 $F(x,y)=x^2+y^2-1$，函数 F 在 $\mathbf{R}^2$ 上有定义．满足 $F(x,y)=0$ 的点的全体是单位圆周 $x^2+y^2=1$，在单位圆周上，除点 $(-1,0)$ 和 $(1,0)$ 外，在其他的每一点处，都可解出 $y=f(x)$，这两点之所以例外，与 $\dfrac{\partial F}{\partial y}(\pm 1,0)=0$ 是有关联的．对称地，在单位圆上除点 $(0,-1)$ 和 $(0,1)$ 之外，在其他的每一点上，都可以解出 $x=g(y)$，这两点之所以例外，与 $\dfrac{\partial F}{\partial x}(0,\pm 1)=0$ 是有关联的．

在陈述下一定理之前，我们注意：如果 I，J 是 $\mathbf{R}$ 中的两个区间，则称 $I\times J$ 为 $\mathbf{R}^2$ 中的一个矩形，它的边分别平行于两坐标轴．同样，若 $I_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ 是 $\mathbf{R}$ 中的区间，那么 $I_1\times I_2\times\cdots\times I_n$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个 n 维长方体．

定理 14.11（隐函数定理）　设开集 $D\subset\mathbf{R}^2$，函数 F：$D\to\mathbf{R}$ 满足条件：

(i) $F\in C^1(D)$；

(ii) 点 $(x_0,y_0)\in D$ 使得 $F(x_0,y_0)=0$；

(iii) $\dfrac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial y}\neq 0$，

那么存在一个包含 (x_0,y_0) 的开矩形 $I\times J\subset D$，使得：

1°　对于每一个 $x\in I$，方程 $F(x,y)=0$ 在 J 中有唯一的解 $f(x)$；

2°　$y_0=f(x_0)$；

3° $f\in C^1(I)$;

4° 当 $x\in I$ 时，有

$$f'(x)=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y)}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y)},\tag{2}$$

其中 $y=f(x)$.

证明 不妨设$\dfrac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial y}>0$. 由条件(i)，存在一个包含$(x_0,y_0)$的开矩形 $I'\times J$满足 $I'\times\overline{J}\subset D$ 并且在 $I'\times J$ 上$\dfrac{\partial F}{\partial y}>0$，于是对于任意给定的 $x\in I'$，$F(x,y)$在闭区间 $\overline{J}$ 上是严格递增的连续函数. 设 $J=(c,d)$，由条件(ii)可知必有

$$F(x_0,c)<0,\quad F(x_0,d)>0.$$

条件(i)能推出 $F\in C(D)$，因此存在含 x_0 的开矩形 $I\subset I'$使得当 $x\in I$ 时

$$F(x,c)<0,\quad F(x,d)>0.$$

由连续函数的零值定理和严格单调性得知，对每一 $x\in I$ 存在唯一的一个数，记作 $f(x)\in(c,d)=J$，使得 $F(x,f(x))=0$. 这就证明了 1°，显然 f 满足 2°.

为了证明 3°和 4°，我们先来证明 f 在开区间 I 上连续. 特别地，要证明 f 在 x_0 处连续. 这是十分明显的. 因为从上述作法中可以看出，不管包含 y_0 的区间 J 取得多么小，一定可以取区间 I 适当小，使得只要 $x\in I$ 时对应的$f(x)\in J$，由此可得$|f(x)-f(x_0)|<|J|$，最后的量代表区间 J 的长度.

现在任取 $x_1\in I$，设 $y_1=f(x_1)$，则$(x_1,y_1)\in I\times J$. 因为 $F(x_1,y_1)=0$，$\dfrac{\partial F(x_1,y_1)}{\partial y}>0$，所以 F 在点(x_1,y_1)处满足它在(x_0,y_0)处的同样条件. 因此由前述证明可知，存在着包含(x_1,y_1)的开矩形 $I_1\times J_1\subset I\times J$，当 $x\in I_1$ 时方程 $F(x,y)=0$ 在 J_1 上有唯一解 $g(x)$，g 在 x_1 处是连续的. 然而由唯一性可知：当 $x\in I_1$ 时 $f(x)=g(x)$，这说明 f 在点 x_1 处是连续的. 由 $x_1\in I$ 的任意性可知 f 在 I 上是连续的.

再证 f 满足 3°和 4°. 设 $x\in I$，取 h 很小使 $x+h\in I$. 令 $y=f(x)$，$k=f(x+h)-f(x)$. 由 F 的可微性并用定理 14.2 可得

$$\begin{aligned}0&=F(x+h,y+k)-F(x,y)\\&=\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)h+\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)k+\alpha h+\beta k,\end{aligned}$$

其中 α 与β 满足：当 $h\to0$ 与 $k\to0$ 时，$\alpha\to0$，$\beta\to0$.

但是，当 $h\to0$ 时由已证明过的$f\in C(I)$得知 $k\to0$，从而当 $h\to0$ 时直接

推出 $\alpha\to0$ 与 $\beta\to0$，所以

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{k}{h}=\lim_{h\to0}\frac{-\left(\frac{\partial F}{\partial x}+\alpha\right)}{\frac{\partial F}{\partial y}+\beta},$$

即

$$f'(x)=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)},$$

其中 $x\in I$ 且 $y=f(x)$，由(2)可知，f'在 I 上连续. □

例 1 方程

$$x^2y^2-3y+2x^3=0$$

在点(1,1)与(1,2)两点的近旁定义着 y 为 x 的函数，试求 $f'(1)$.

解 令 $F(x,y)=x^2y^2-3y+2x^3$，我们有 $F(1,1)=0$ 及 $F(1,2)=0$，此外

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)=2x^2y-3,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(1,1)=-1,\ \frac{\partial F}{\partial y}(1,2)=1,$$

因此在(1,1)的近旁

$$f'(1)=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(1,1)}{\frac{\partial F}{\partial y}(1,1)}=\frac{-8}{-1}=8;$$

在(1,2)的近旁

$$f'(1)=\frac{-\frac{\partial F}{\partial x}(1,2)}{\frac{\partial F}{\partial y}(1,2)}=\frac{-14}{1}=-14.\quad\square$$

这个例子不通过隐函数定理也能算出需要的答案，因为方程 $x^2y^2-3y+2x^3=0$ 可以看成是 y 的二次方程，从中容易解出 y 对于 x 的依赖关系. 在点(1,1)的近旁，可以解得

$$y=\frac{3-\sqrt{9-8x^5}}{2x^2};$$

在点(1,2)的近旁，可以解得

$$y=\frac{3+\sqrt{9-8x^5}}{2x^2}.$$

直接对这两个函数求导，可以分别算出在 $x=1$ 处的导数．建议读者计算一下，以同前面的数值结果作比较．

例 2 方程

$$\sin x+\log y-xy^3=0$$

在点(0,1)的近旁确定函数 $y=f(x)$，求 $f'(0)$．

解 令 $F(x,y)=\sin x+\log y-xy^3$，那么 $F(0,1)=0$，而且

$$\frac{\partial F(0,1)}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial F(0,1)}{\partial y}=1,$$

因此

$$f'(0)=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(0,1)}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(0,1)}=0.\qquad \square$$

这个例子非用隐函数定理不可，这是因为我们无法从方程 $F(x,y)=0$ 中直接解出 y 对 x 的显式关系或 x 对 y 的显式关系．

作过这两个例子之后，我们再对定理 14.11 作一番解说，以加深读者的理解．

由方程(1)在某一点的范围内确定的函数 f，称为由这个方程所确定的**隐函数**，我们姑且这样来理解，在一般情形之下，只知道函数 f 的存在，不见得能得出 f 的解析表达式．这就是“隐”字的意义，是相对于有“明显的”表达式而言的．但是，f 确实是一个函数，因为它符合函数的定义．

虽说 f 一般不具有明显的解析表达式，但是，要在 f 有定义的范围之内，作函数值的近似计算，则是完全可能的．回忆定理 14.11 的证明，我们记得当 $x\in I$ 时，一方面 $F(x,c)<0$ 与 $F(x,d)>0$ 成立；另一方面当 y 在$[c,d]$中从小变大时，$F(x,y)$是 y 的严格增函数，那个唯一的零点就是 $f(x)$，利用对分区间套的方法，就可以把 $f(x)$计算到你所希望的精确程度．

最后我们指出：公式(2)不必强记，因为只要学会了使用复合求导的方法，这个公式是可以随时推出来的．记住当 $x\in I$ 时，我们有恒等式

$$F(x,f(x))\equiv 0,$$

双方求导之后，便可得出

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,f(x))+\frac{\partial F}{\partial y}(x,f(x))f'(x)\equiv 0$$

对 $x\in I$ 成立，由此立得公式(2)．这种处理方法，甚至可以直接应用到解题上．

例 3 设隐函数 $y(x)$由方程

$$y=2x\arctan\frac{y}{x}\quad (x\neq 0)$$

定义，求 y'及 y''.

解　将所给方程改写为

$$F(x,y)=y-2x\arctan\frac{y}{x}=0.$$

容易验证，二元函数 F 满足定理 14.11 中的全部条件，因此 $F=0$ 可以确定可微的隐函数 $y(x)$. 为了求出 $y'(x)$，设想 $F(x,y)=0$ 中的 y 已是$y(x)$而变成了一个恒等式. 双方对 x 求导，但应时刻记住 y 是x 的函数，便得出

$$y'-2\arctan\frac{y}{x}-2x\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(\frac{xy'-y}{x^2}\right)=0,$$

即

$$y'-2\arctan\frac{y}{x}+\frac{2xy}{x^2+y^2}-\frac{2x^2y'}{x^2+y^2}=0,$$

由于 $2\arctan\frac{y}{x}=\frac{y}{x}$，上式变为

$$y'\left(1-\frac{2x^2}{x^2+y^2}\right)=\frac{y}{x}-\frac{2xy}{x^2+y^2},$$

化简后得

$$y'\frac{y^2-x^2}{x^2+y^2}=\frac{y}{x}\left(\frac{y^2-x^2}{y^2+x^2}\right),$$

由此解出

$$y'=\frac{y}{x}.$$

在上式双方再一次对 x 求导

$$y''=\frac{xy'-y}{x^2}=\frac{1}{x^2}\left(x\frac{y}{x}-y\right)=0.$$

所得的结果简单得惊人，仔细地观察可知，这原是意料之中的事.

事实上，若令 $t=\frac{y}{x}$，则原来的方程可以写成

$$\frac{t}{2}=\arctan t,$$

这个方程只有三个根，记为 $t_0=0$，t_1，t_2，其中 $t_1=-t_2$. 因此，原来的方程的解是

$$y=t_ix\quad(i=0,1,2),$$

其中 $x\neq0$. 这就是说，解是 6 条由原点出发的射线(不包括原点). 在每一条这样的射线上，

$$y'=t_i=\frac{y}{x},$$

而 $y''=(t_i)'=0$，$i=0$，1，2. □

定理 14.11 是隐函数存在定理的最简单的情形，从这个定理的证明中可以看出，证明对于更多的变元也是适用的，无需重做一次.

定理 14.12 设开集 $D\subset\mathbf{R}^{n+1}$，F：$D\to\mathbf{R}$，满足条件：

(i) $F\in C^{(1)}(D)$；

(ii) $F(\boldsymbol{x}_0,y_0)=0$，这里 $\boldsymbol{x}_0\in\mathbf{R}^n$，$y_0\in\mathbf{R}$ 且$(\boldsymbol{x}_0,y_0)\in D$；

(iii) $\dfrac{\partial F(\boldsymbol{x}_0,y_0)}{\partial y}\neq 0$，

则存在$(\boldsymbol{x}_0,y_0)$的一个邻域 $G\times J$，其中 G 是 $\boldsymbol{x}_0$ 在 $\mathbf{R}^n$ 的一个邻域，J 是 $\mathbf{R}$ 中含 y_0 的一个开区间，使得：

1° 对于每一个 $\boldsymbol{x}\in G$，方程

$$F(\boldsymbol{x},y)=0$$

在 J 中有唯一解，记为 $f(\boldsymbol{x})$；

2° $y_0=f(\boldsymbol{x}_0)$；

3° $f\in C^1(G)$；

4° 当 $\boldsymbol{x}\in G$ 时，

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_i}=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x_i}(\boldsymbol{x},y)}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(\boldsymbol{x},y)}\quad(i=1,2,\cdots,n),\tag{3}$$

其中 $y=f(\boldsymbol{x})$.

例 4 设方程

$$\sin u-xyu=0$$

确定隐函数 $u=f(x,y)$，求$\dfrac{\partial f}{\partial x}$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

解 把上式中的 u 看成是 x 与 y 的函数，使得上式成为关于 x，y 的恒等式. 先对 x 求偏导数，得

$$\frac{\partial f}{\partial x}\cos f-yf-xy\frac{\partial f}{\partial x}=0,$$

解出

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{yf}{\cos f-xy},$$

将 x 与 y 的位置对换，又得

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{xf}{\cos f-xy},$$

其中 f 表示$f(x,y)$. □

例 5 设 $z=z(x,y)$是由方程

$$f\left(x+zy^{-1}, y+zx^{-1}\right)=0 \tag{4}$$

所确定的隐函数，计算$\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解　命 $\xi=x+zy^{-1}$，$\eta=y+zx^{-1}$，让(4)的两端对 x 求偏导数得

$$\frac{\partial f}{\partial \xi}\left(1+\frac{\partial z}{\partial x}y^{-1}\right)+\frac{\partial f}{\partial \eta}\left(\frac{\partial z}{\partial x}x^{-1}-\frac{z}{x^{2}}\right)=0.$$

从上式解出$\dfrac{\partial z}{\partial x}$得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\dfrac{\partial f}{\partial \xi}-\dfrac{\partial f}{\partial \eta}\dfrac{z}{x^{2}}}{\dfrac{\partial f}{\partial \xi}\dfrac{1}{y}+\dfrac{\partial f}{\partial \eta}\dfrac{1}{x}}.$$

用同样的方法可以算得

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\dfrac{\partial f}{\partial \eta}-\dfrac{\partial f}{\partial \xi}\dfrac{z}{y^{2}}}{\dfrac{\partial f}{\partial \xi}\dfrac{1}{y}+\dfrac{\partial f}{\partial \eta}\dfrac{1}{x}}.$$

也可用公式(3)来计算，这时把(4)的左端记为

$$F(x,y,z)=f\left(x+zy^{-1}, y+zx^{-1}\right),$$

并把 x，y，z 看成独立变量，于是

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial \xi}-\frac{\partial f}{\partial \eta}\frac{z}{x^{2}},\quad \frac{\partial F}{\partial y}=-\frac{\partial f}{\partial \xi}\frac{z}{y^{2}}+\frac{\partial f}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}=\frac{\partial f}{\partial \xi}\frac{1}{y}+\frac{\partial f}{\partial \eta}\frac{1}{x}.$$

代入公式(3)，即得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}=-\frac{\dfrac{\partial f}{\partial \xi}-\dfrac{\partial f}{\partial \eta}\dfrac{z}{x^{2}}}{\dfrac{\partial f}{\partial \xi}\dfrac{1}{y}+\dfrac{\partial f}{\partial \eta}\dfrac{1}{x}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}=-\frac{\dfrac{\partial f}{\partial \eta}-\dfrac{\partial f}{\partial \xi}\dfrac{z}{y^{2}}}{\dfrac{\partial f}{\partial \xi}\dfrac{1}{y}+\dfrac{\partial f}{\partial \eta}\dfrac{1}{x}}.$$

两种算法的结果是一样的. □

练习题　14.6

1. 下列方程确定隐函数 $y(x)$，计算$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$：

(1) $x^2+2xy-y^2=a^2$;

(2) $xy-\log y=0$ 在点$(0,1)$处;

(3) $y-\varepsilon\sin y=x$, 常数 $\varepsilon\in(0,1)$;

(4) $x^y=y^x$.

2. 从下列方程中，计算$\frac{\partial z}{\partial x}$和$\frac{\partial z}{\partial y}$:

(1) $e^z-xyz=0$;

(2) $\frac{x}{z}=\log\frac{z}{y}$;

(3) $x+y+z=e^{-(x+y+z)}$, 并对计算的结果作出解释;

(4) $z^2y-xz^3-1=0$, 在点$(1,2,1)$处.

3. 设 $F(x,y,z)=0$, 求证: $\frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=-1$.

4. 设 $F(x-y,y-z,z-x)=0$, 计算$\frac{\partial z}{\partial x}$和$\frac{\partial z}{\partial y}$.

5. 设 $F(x+y+z,x^2+y^2+z^2)=0$, 计算$\frac{\partial z}{\partial x}$和$\frac{\partial z}{\partial y}$.

6. 二元函数 F 在 $\mathbf{R}^2$ 上二次连续可微. 已知曲线 $F(x,y)=0$ 呈“8”字形. 问方程组

$$\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)=0,\\ \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)=0\end{cases}$$

在 $\mathbf{R}^2$ 中至少有几组解?

§ 14.7 隐映射定理

本节的内容是定理 14.12 的直接推广.

设想我们有 m 个方程形成的方程组

$$\begin{cases}F_1(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_m)=0,\\ \quad\cdots\cdots\\ F_m(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_m)=0,\end{cases}\tag{1}$$

其中涉及的变元的个数 $m+n$ 多于方程的个数. 如果方程组(1)是一个合适的约束, 可望从(1)中“解出” y_1, $\cdots$, y_m, 使得其中的每一个都是 x_1, $\cdots$, x_n 的函数, 即

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, \cdots, x_n), \\ \quad \cdots\cdots \\ y_m = f_m(x_1, \cdots, x_n), \end{cases} \tag{2}$$

这里 x_1，…，x_n 是 n 个独立的变元. 为了缩短记号，可令

$$\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_m \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix},$$

从而把方程(1)写为

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{0}, \tag{3}$$

其中$\boldsymbol{0}$ 是 $m \times 1$ 的零矩阵；而把(2)写为

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}). \tag{4}$$

设 $\boldsymbol{F}$ 定义在开集 $D \subset \mathbf{R}^{m+n}$，在 $m \times (n+m)$矩阵

$$J\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} & \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n} & \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{pmatrix}$$

中作分块 $J\boldsymbol{F} = (J_x\boldsymbol{F}, J_y\boldsymbol{F})$，其中

$$J_x\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n} \end{pmatrix},$$

$$J_y\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{pmatrix},$$

$J_x\boldsymbol{F}$ 是一个 $m \times n$ 矩阵，而 $J_y\boldsymbol{F}$ 是一个 m 阶方阵.

有了这些准备之后，我们可以来精确地表述**隐映射定理**.

定理 14.13 设开集 $D \subset \mathbf{R}^{n+m}$，映射 $\boldsymbol{F}$: $D \to \mathbf{R}^m$，满足下列条件:

(i) $\boldsymbol{F} \in C^1(D)$；

(ii) 有一点$(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) \in D$ 使得 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) = \boldsymbol{0}$；

(iii) 行列式 $\det J_y\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) \neq 0$,

则存在$(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0)$的一个邻域 $G \times H$，使得:

1° 对每一个 $\boldsymbol{x}\in G$，方程(3)在 H 中有唯一的解——记为 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$；

2° $\boldsymbol{y}_0=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)$；

3° $\boldsymbol{f}\in C^1(G)$；

4° 当 $\boldsymbol{x}\in G$ 时，

$$J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=-(J_y\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))^{-1}J_x\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),$$

其中 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$.

证明 我们对方程组(1)中的个数进行归纳法.

当 $m=1$ 时(1)中只有一个方程，本定理就是定理 14.12. 设当方程的个数为 $m-1$ 时，结论是正确的，我们来考察 m 个方程时的情况，即(1)成立的情况.

由于 $\det J_y\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)\neq 0$ 以及 $\boldsymbol{F}\in C^1(D)$，不妨设在 D 上的每一点都有 $\det J_y(\boldsymbol{F})\neq 0$，否则可以找出开集 D_1 使$(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)\in D_1\subset D$，使得在 D_1 上的每一点处都有 $\det J_y\boldsymbol{F}\neq 0$，这时就把 D_1 干脆当成是 D 好了.

由条件(iii)，可知 m 阶方阵

$$\left(\frac{\partial F_i}{\partial y_j}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)\right)$$

中，不能每一个元素都等于零. 为方便起见，设

$$\frac{\partial F_m}{\partial y_m}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)\neq 0. \tag{5}$$

改变一些记号，例如置

$$\boldsymbol{u}=(y_1,\cdots,y_{m-1}),$$

$$t=y_m,$$

$$\boldsymbol{y}=(\boldsymbol{u},t).$$

再用矩阵等式 $\boldsymbol{y}_0=(\boldsymbol{u}_0,t_0)$来规定记号 $\boldsymbol{u}_0$ 与 t_0 的意义. 这样一来，(5)可以写成

$$\frac{\partial F_m}{\partial t}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u}_0,t_0)\neq 0,$$

又有

$$F_m(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u}_0,t_0)=F_m(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)=0,$$

由定理 14.12 可知，存在$(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u}_0,t_0)$的一个邻域$(G_n\times G_{m-1})\times J\subset D$ 使得

(a) 对每一点$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})\in G_n\times G_{m-1}$，方程

$$F_m(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t)=0$$

在 J 中有唯一的解 $t=\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})$，这里的函数 φ：$G_n\times G_{m-1}\to J$；

(b) $\varphi(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u}_0)=t_0$；

(c) $\varphi\in C^1(G_n\times G_{m-1})$.

到此为止，我们所做过的事只是：从方程组(1)的最后一个方程将 y_m 解出成为其他变元 x_1，…，x_n，y_1，…，y_{m-1}的函数. 下面将要做的是：将这个函数代入(1)中最初的 $m-1$ 个方程，以消去变量 y_m.

以上的两点不过是解方程组时常用的"消元"技巧.

方程组(1)中前面那 $m-1$ 个方程的左边遂变为

$$\Phi_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})=F_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})),\quad i=1,2,\cdots,m-1. \tag{6}$$

考虑映射

$$\boldsymbol{\Phi}=\begin{pmatrix}\Phi_1\\ \vdots\\ \Phi_{m-1}\end{pmatrix}:\ G_n\times G_{m-1}\to\mathbf{R}^{m-1}.$$

若能证明 $\boldsymbol{\Phi}$ 满足本定理的三个条件，便可利用归纳假定了.

显然 $\boldsymbol{\Phi}\in C^1$，并且由于

$$\begin{aligned}\Phi_i(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u}_0)&=F_i(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u}_0,\varphi(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u}_0))\\&=F_i(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u}_0,t_0)=F_i(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)=0,\end{aligned}$$

$i=1$，…，$m-1$，所以 $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u}_0)=0$.

现在证明 $\det J_u\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u}_0)\neq 0$.

让(6)两端对 u_j (即 $y_j,j=1,\cdots,m-1$)求导数得

$$\frac{\partial\Phi_i}{\partial u_j}=\frac{\partial F_i}{\partial y_j}+\frac{\partial F_i}{\partial y_m}\frac{\partial\varphi}{\partial u_j},\quad i,\ j=1,\ \cdots,\ m-1, \tag{7}$$

由于(a)就是

$$F_m(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}))=0.$$

让上式也对 u_j (即 $y_j,j=1,\cdots,m-1$)求导数得

$$\frac{\partial F_m}{\partial y_j}+\frac{\partial F_m}{\partial y_m}\frac{\partial\varphi}{\partial u_j}=0,\quad j=1,\ \cdots,\ m-1. \tag{8}$$

利用行列式的性质和(7)、(8)两组等式，即得

$$\begin{vmatrix}\dfrac{\partial F_1}{\partial y_1}&\cdots&\dfrac{\partial F_1}{\partial y_m}\\ \vdots&&\vdots\\ \dfrac{\partial F_m}{\partial y_1}&\cdots&\dfrac{\partial F_m}{\partial y_m}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial F_1}{\partial y_1}+\dfrac{\partial F_1}{\partial y_m}\dfrac{\partial\varphi}{\partial u_1}&\dfrac{\partial F_1}{\partial y_2}+\dfrac{\partial F_1}{\partial y_m}\dfrac{\partial\varphi}{\partial u_2}&\cdots&\dfrac{\partial F_1}{\partial y_m}\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ \dfrac{\partial F_m}{\partial y_1}+\dfrac{\partial F_m}{\partial y_m}\dfrac{\partial\varphi}{\partial u_1}&\dfrac{\partial F_m}{\partial y_2}+\dfrac{\partial F_m}{\partial y_m}\dfrac{\partial\varphi}{\partial u_2}&\cdots&\dfrac{\partial F_m}{\partial y_m}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial u_{m-1}} & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \Phi_{m-1}}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial \Phi_{m-1}}{\partial u_{m-1}} & \frac{\partial F_{m-1}}{\partial y_m} \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{vmatrix}$$

$$=\frac{\partial F_m}{\partial y_m}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u}_0,t_0)\det(J_u\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u}_0)). \tag{9}$$

根据条件(iii)，(9)的左端不等于0，因而

$$\det(J_u\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u}_0))\neq 0.$$

所有这些表明，映射 $\boldsymbol{\Phi}$ 适合本定理中的三个条件，可对 $\boldsymbol{\Phi}$ 用归纳假设，知定理的结论 1°，2°和 3°对于映射 $\boldsymbol{\Phi}$ 成立．这就是说，存在点$(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u}_0)$的邻域 $G\times H_{m-1}\subset G_n\times G_{m-1}$使得

[1] 当 $\boldsymbol{x}\in G$ 时方程 $\Phi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})=0$ 在 H_{m-1}中有唯一解 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$，其中映射 $\boldsymbol{g}$: $G\to H_{m-1}$;

[2] $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{u}_0$;

[3] $\boldsymbol{g}\in C^1(G)$.

令

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\begin{pmatrix}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\\ \varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}))\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{x}\in G,$$

$$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}_{m-1}\times\boldsymbol{J},$$

于是 $\boldsymbol{f}$: $G\to H$. 我们要证明 $\boldsymbol{f}$ 满足条件 1°，2°和 3°.

当 $\boldsymbol{x}\in G$ 时，$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}))\in G\times H_{m-1}\subset G_n\times G_{m-1}$，于是由[1]可得

$$\begin{aligned} F_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})) &= F_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}),\ \varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}))) \\ &= \Phi_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}))=0,\quad i=1,\ \cdots,\ m-1; \end{aligned}$$

另外由(a)又有

$$F_m(\boldsymbol{x},\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))=F_m(\boldsymbol{x},\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}),\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})))=0,$$

结合以上诸式，得出当 $\boldsymbol{x}\in G$ 时有 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))=0$. 这就证明了 $\boldsymbol{f}$ 满足 1°.

由[2]和(b)，可见

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0)\\ \varphi(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0))\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}_0\\ \varphi(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u}_0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}_0\\ t_0\end{pmatrix}=\boldsymbol{y}_0,$$

所以 $\boldsymbol{f}$ 满足 2°.

再由[3]和(c)即知 $\boldsymbol{f}$ 满足 3°.

到此为止，我们已经证明了在定理的条件下，存在隐映射 $\boldsymbol{f}$ 满足定理中的

1°，2°和 3°. 余下的是要证明 $\boldsymbol{f}$ 也满足 4°. 事实上，当 $\boldsymbol{x}\in G$ 时有恒等式

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))=0,$$

对上式复合求导，得到

$$J_x\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))+J_y\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=0,$$

由于在 D 上 $\det J_y\boldsymbol{F}$ 处处不为零，所以 $J_y\boldsymbol{F}$ 是可逆方阵. 在上式中取逆方阵，得出

$$J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=-(J_y\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})))^{-1}J_x\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})),$$

这正是 4°.

定理 14.13 到此证毕. □

定理 14.13 不仅具有重要的理论意义，而且上述证明过程提供了一种可操作的求非线性方程组的近似解的方法.

例 1 设

$$x_1y_2-4x_2+2e^{y_1}+3=0,$$

$$2x_1-x_3-6y_1+y_2\cos y_1=0,$$

计算当 $x_1=-1$，$x_2=1$，$x_3=-1$，$y_1=0$，$y_2=1$ 时的 Jacobian$\left(\dfrac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)$.

解 这里共有 5 个变元，被两个方程所限制，因此其中有 3 个变元可视为独立的，其余 2 个变元是另外 3 个变元的函数. 题目要求把 x_1，x_2，x_3 当成独立变量，y_1 与 y_2 当成 x_1，x_2，x_3 的函数.

令题目中那两个方程的左边分别为 F_1 与 F_2，$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)$，$\boldsymbol{y}=(y_1,y_2)$，

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\begin{pmatrix}F_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\\F_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\end{pmatrix}.$$

于是

$$J_x\boldsymbol{F}=\begin{pmatrix}y_2&-4&0\\2&0&-1\end{pmatrix},$$

$$J_y\boldsymbol{F}=\begin{pmatrix}2e^{y_1}&x_1\\-6-y_2\sin y_1&\cos y_1\end{pmatrix}.$$

置 $\boldsymbol{x}_0=(-1,1,-1)$，$\boldsymbol{y}_0=(0,1)$，由此算出

$$J_x\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)=\begin{pmatrix}1&-4&0\\2&0&-1\end{pmatrix},$$

$$J_y\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)=\begin{pmatrix}2&-1\\-6&1\end{pmatrix}.$$

因此

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_3} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -4 & -1 \\ 10 & -24 & -2 \end{pmatrix}. \square$$

例 2 设

$$z = f(x,y), \quad g(x,y) = 0,$$

其中 f 和 g 都是二元可微函数，求 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$.

解法一 认为 $g(x,y)=0$ 确定隐函数 $y=\varphi(x)$，然后代入第一个等式，使 z 成为 x 的函数

$$z = f(x,\varphi(x)),$$

再将 z 对 x 求导

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\varphi'(x),$$

其中 $y=\varphi(x)$，另一方面

$$\varphi'(x) = -\frac{\dfrac{\partial g}{\partial x}}{\dfrac{\partial g}{\partial y}},$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^{-1}$$

$$= \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^{-1}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix},$$

其中所有的偏导数在 $(x,\varphi(x))$ 取值.

在这种解法中，只用到定理 14.11，并不涉及隐映射定理.

解法二 令

$$F_1 = f(x,y) - z, \quad F_2 = g(x,y),$$

$$\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix},$$

所以

$$
JF=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & -1\\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & 0\end{pmatrix}.
$$

当行列式

$$
\begin{vmatrix}\frac{\partial f}{\partial y} & -1\\ \frac{\partial g}{\partial y} & 0\end{vmatrix}=\frac{\partial g}{\partial y}\neq 0
$$

时，由定理 14.13 可知，方程 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{0}$ 确定 y 与 z 是 x 的函数，并且

$$
\begin{pmatrix}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial y} & -1\\ \frac{\partial g}{\partial y} & 0\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}\\ \frac{\partial g}{\partial x}\end{pmatrix}
$$

$$
=\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^{-1}\begin{pmatrix}0 & -1\\ \frac{\partial g}{\partial y} & -\frac{\partial f}{\partial y}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}\\ \frac{\partial g}{\partial x}\end{pmatrix},
$$

比较两边第二行的元素，得到

$$
\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}\right)
$$

$$
=\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^{-1}\begin{vmatrix}\frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y}\\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y}\end{vmatrix}.
$$

比较下来，第一种解法更直接、更简单一些. □

练习题　14.7

1. 从方程组

$$
\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1,\\ x+y+z=0\end{cases}
$$

中，计算 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 和 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$，并作出几何解释.

2. 从方程组

$$
\begin{cases}x^2+y^2-z=0,\\ x^2+2y^2+3z^2=20\end{cases}
$$

中，计算$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$和$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$，并作出几何解释.

3. 从方程组

$$\begin{cases} x = t + \dfrac{1}{t}, \\ y = t^2 + \dfrac{1}{t^2}, \\ z = t^3 + \dfrac{1}{t^3} \end{cases}$$

中，计算$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$和$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$.

4. 从下列方程中，计算 Jacobian

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}:$$

(1) $xu - yv = 0$，$yu + xv = 1$;

(2) $x + y = u + v$，$\dfrac{x}{y} = \dfrac{\sin u}{\sin v}$.

5. 设

$$\begin{cases} u^2 - v\cos(xy) + w^2 = 0, \\ u^2 + v^2 - \sin(xy) + 2w^2 = 2, \\ uv - \sin x \cos y + w = 0, \end{cases}$$

在$(x, y) = \left(\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$，$(u, v, w) = (1,1,0)$处计算 Jacobian

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial w}{\partial x} & \dfrac{\partial w}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

6. 设 $u = f(x, y, z, t)$，$g(y, z, t) = 0$，$h(z, t) = 0$，计算$\frac{\partial u}{\partial x}$和$\frac{\partial u}{\partial y}$.

§ 14.8　逆映射定理

为了让读者更好地理解“逆映射定理”，回忆一下单变量函数中的反函数存在问

题将是有帮助的.设(a,b)是一个开区间，一元函数f：$(a,b)\to\mathbf{R}$并且$f\in C^1(a,b)$，设$x_0\in(a,b)$并且$f'(x_0)\neq 0$，为确定起见，不妨设$f'(x_0)>0$，由f'的连续性，一定存在$(\alpha,\beta)\subset(a,b)$使得$x_0\in(\alpha,\beta)$，$[\alpha,\beta]\subset(a,b)$，且当$x\in(\alpha,\beta)$时有$f'(x)>0$，这表明在$(\alpha,\beta)$上函数$f$是严格递增的. 记$y_0=f(x_0)$，$A=f(\alpha)$,$B=f(\beta)$，那么在$(A,B)$上存在着反函数$f^{-1}$，它满足$f^{-1}(y_0)=x_0$，$f\circ f^{-1}(y)=y$对$y\in(A,B)$成立，$f^{-1}$在$(A,B)$上连续可微并且

$$f^{-1'}(y)=(f'(x))^{-1},$$

其中$y=f(x)$或等价地$x=f^{-1}(y)$.

以上的推理也可以放在隐函数存在定理的范围内进行. 考察二元函数

$$F(x,y)=f(x)-y,$$

它的定义域是$\mathbf{R}^2$中的开集$D=(a,b)\times\mathbf{R}$. 点$(x_0,y_0)\in D$使得

$$F(x_0,y_0)=f(x_0)-y_0=y_0-y_0=0,$$

并且

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)=f'(x_0)\neq 0,$$

显然$F\in C^1(D)$，依定理 14.11 便可以作出结论：存在开区间$(\alpha,\beta)\subset(a,b)$和$(A,B)$，使得对每一个$y\in(A,B)$，方程$F(x,y)=0$，即方程$f(x)=y$在$(\alpha,\beta)$内有唯一的解$f^{-1}(y)$；$f^{-1}\in C^{(1)}(A,B)$并且

$$f^{-1'}(y)=-\frac{\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y}}{\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial x}}$$

$$=\frac{1}{f'(x)},$$

其中$y=f(x)$.

所谓逆映射定理同隐映射存在定理的关系正是上述反函数定理同隐函数存在定理的关系.

定理 14.14 设开集$D\subset\mathbf{R}^n$，f：$D\to\mathbf{R}^n$. 如果

(i) $\boldsymbol{f}\in C^1(D)$；

(ii) 有$\boldsymbol{x}_0\in D$使

$$\det J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)\neq 0,$$

记$\boldsymbol{y}_0=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)$，那么存在$\boldsymbol{x}_0$的一个邻域$U$和$\boldsymbol{y}_0$的一个邻域$V$使得

1° $\boldsymbol{f}(U)=V$，且$\boldsymbol{f}$在U上是单射；

2° 记$\boldsymbol{g}$是$\boldsymbol{f}$在U上的逆映射，$\boldsymbol{g}\in C^1(V)$；

3° 当$\boldsymbol{y}\in V$时

$$J\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})=(J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))^{-1},$$

其中 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})$.

证明 置

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{y},$$

这个映射定义在 $D\times\mathbf{R}^n$上，显然 $\boldsymbol{F}\in C^1(D\times\mathbf{R}^n)$，并且

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)-\boldsymbol{y}_0=\boldsymbol{y}_0-\boldsymbol{y}_0=\mathbf{0}.$$

此外，由条件(ii)：

$$\det J_x\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)=\det J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)\neq 0.$$

依定理 14.13(隐映射定理)，存在 $\boldsymbol{x}_0$ 的邻域 H 和 $\boldsymbol{y}_0$ 的邻域 V，其中 $H\subset D$，使得对于每一点 $\boldsymbol{y}\in V$，方程 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=0$ 即 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{y}$ 在 H 中有唯一解，记作 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})$，其中 $\boldsymbol{g}\in C^1(V)$，并且当 $\boldsymbol{y}\in V$ 时，

$$\begin{aligned}J\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})&=-(J_x\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))^{-1}J_y\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\\&=-(J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))^{-1}(-\boldsymbol{I}_n)\\&=(J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))^{-1},\end{aligned}$$

这里 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})$.

令 $U=\boldsymbol{g}(V)$，显见 $V=\boldsymbol{f}(U)$，$\boldsymbol{f}$ 与 $\boldsymbol{g}$ 互为逆映射，余下的只需证明 U 是开集.

事实上，由等式

$$U=H\cap\boldsymbol{f}^{-1}(V),$$

这里 $\boldsymbol{f}^{-1}(V)$是 V 在$\boldsymbol{f}$ 之下的逆像. 由于 V 是开集而$\boldsymbol{f}$ 是连续映射，故由定理 13.29 知道 $\boldsymbol{f}^{-1}(V)$是开集. 又因 H 是开集，所以 U 也是开集. □

需要特别提出的是，这个定理只具有局部的性质，就是说，只是在点 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)$的近旁才存在着逆映射. 即使当 $\det J\boldsymbol{f}$ 在 D 上处处不等于零，我们也只能断言在 $\boldsymbol{f}(D)$中的每一个点的一个局部范围内存在着逆映射，它们一般不可能在大范围内成为 $\boldsymbol{f}$ 在$\boldsymbol{f}(D)$上的逆映射.

但是，有如下的定理：

定理 14.15 (逆映射定理) 设开集 $D\subset\mathbf{R}^n$，$\boldsymbol{f}$: $D\to\mathbf{R}^n$，如果

(i) $\boldsymbol{f}\in C^1(D)$；

(ii) 对每一 $\boldsymbol{x}\in D$，$\det J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\neq 0$，

则 $G=\boldsymbol{f}(D)$为一开集. 又如果

(iii) $\boldsymbol{f}$ 是 D 上的单射，

那么存在由 G 到 D 上的映射$\boldsymbol{f}^{-1}$满足：对一切 $\boldsymbol{y}\in G$ 有

$$\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{y})=\boldsymbol{y},\tag{1}$$

此外，$\boldsymbol{f}^{-1}\in C^1(G)$并且

$$J\boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{y})=(J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))^{-1},\tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{f}^{-1}(y)$.

证明　由于 $\boldsymbol{f}$ 是一单射，故逆映射 $\boldsymbol{f}^{-1}$ 的存在是显然的事，因此(1)式必然成立. 前一定理(局部逆映射的存在性)保证了局部逆映射的存在唯一性. 由于整体的逆映射必然是局部的逆映射，所以(2)也是成立的. 余下来需要证明的只是 $\boldsymbol{f}(D)$ 是一开集. 任取一点 $\boldsymbol{y}\in G$，存在一点 $\boldsymbol{x}\in D$ 使 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$，由定理 14.14，存在 $\boldsymbol{x}$ 的一个邻域 U 和 $\boldsymbol{y}$ 的一个邻域 V 满足 $V=\boldsymbol{f}(U)$，因此 $V=\boldsymbol{f}(U)\subset\boldsymbol{f}(D)=G$，这表明 $\boldsymbol{y}$ 是 G 的一个内点. 由于 $\boldsymbol{y}\in G$ 是任取的，这表明 G 全由内点组成，所以 G 是开集. □

为了使今后的叙述简练，我们给出以下定义：

定义 14.6　设开集 $D\subset\mathbf{R}^n$，如果映射 $\boldsymbol{f}$: $D\to\mathbf{R}^n$ 满足以下三个条件：

1°　$\boldsymbol{f}\in C^1(D)$；

2°　$\boldsymbol{f}$ 是 D 上的单射；

3°　$\det J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\neq 0$ 对一切 $\boldsymbol{x}\in D$ 成立，

则称 $\boldsymbol{f}$ 是 D 上的一个**正则映射**.

很明显，正则映射 $\boldsymbol{f}$ 的逆映射 $\boldsymbol{f}^{-1}$: $\boldsymbol{f}(D)\to D$，也是一个正则映射.

用通俗的话来说，前两个定理是关于方程组

$$\begin{cases} f_1(x_1,\cdots,x_n)=y_1, \\ f_2(x_1,\cdots,x_n)=y_2, \\ \quad\cdots\cdots \\ f_n(x_1,\cdots,x_n)=y_n \end{cases} \tag{3}$$

在怎样的点上，在多大的范围内，存在着唯一解，并建议了求数值解的方法. 不仅如此，定理还断言了**解对初始数据的连续依赖性**. 这就是说，如果 $\boldsymbol{x}_0$ 是方程组 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{y}_0$ 的一个解，给 $\boldsymbol{y}_0$ 的一个充分小的扰动 $\boldsymbol{\eta}$，那么方程组 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{y}_0+\boldsymbol{\eta}$ 的解 $\boldsymbol{x}_0+\varepsilon$ 同 $\boldsymbol{x}_0$ 的偏差 ε 就不会很大.

公式(2)可以写成矩阵的形式

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_1}{\partial y_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial x_n}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial y_n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}^{-1}. \tag{4}$$

人们习惯上把 Jacobian 行列式记为

$$\frac{\partial(y_1,\cdots,y_n)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)}=\det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial y_n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{pmatrix},$$

那么在(4)的两边取行列式得出

$$\frac{\partial(x_1,\cdots,x_n)}{\partial(y_1,\cdots,y_n)}=\frac{1}{\dfrac{\partial(y_1,\cdots,y_n)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)}}. \tag{5}$$

例 1 极坐标变换是

$$\begin{cases}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta,\end{cases}$$

求 r 和 θ 关于 x, y 的偏导数.

解 由公式(4)

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial r}{\partial x} & \dfrac{\partial r}{\partial y}\\ \dfrac{\partial \theta}{\partial x} & \dfrac{\partial \theta}{\partial y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta}\\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta}\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{r}\begin{pmatrix}r\cos\theta & r\sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}. \qquad \square$$

例 2 设

$$\begin{cases}x^2=vy,\\ y^2=ux,\end{cases}$$

求$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$.

解 从方程组中可以直接解出

$$u=\frac{y^2}{x},\quad v=\frac{x^2}{y},$$

因此

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y}\\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-\dfrac{y^2}{x^2} & \dfrac{2y}{x}\\ \dfrac{2x}{y} & -\dfrac{x^2}{y^2}\end{vmatrix}=-3,$$

按公式(5)可得

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=-\frac{1}{3}. \qquad \square$$

练习题 14.8

1. 设 $D\subset\mathbf{R}^n$. 映射 f: $D\to\mathbf{R}^n$. 如果 f 把开集映为开集, 则称 f 为一开映射. 问下列映射是不是开映射:

(1) $f(x,y)=\left(x^2,\dfrac{y}{x}\right)$;

(2) $f(x,y)=(e^x\cos y, e^x\sin y)$;

(3) $f(x,y)=(x+y, 2xy^2)$.

2. 对上题中的三个映射 f，计算 Jf^{-1}.

§14.9　高阶偏导数

设在开集 D 上的每一点，函数 f 存在偏导数

$$D_i f(\boldsymbol{x})=\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}),\quad i=1,2,\cdots,n,$$

称它们为 f 的**一阶偏导函数**，如果对这些偏导函数又可求取偏导数，得出的就是 f 的**二阶偏导函数**，仿此可以定义**三阶偏导数**乃至更高阶的偏导数.

一个 n 个变量的函数的二阶偏导数可以有 n^2 种花样. 当我们将一阶偏导函数 $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ 再对 x_i 求偏导数时，把 $\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)$ 直接记为 $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$，这里 i，j 独立地从 1 变到 n；如果 $i=j$，那么把 $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}$ 记作 $\frac{\partial^2 f}{\partial {x_i}^2}$，$i=1,2,\cdots,n$.

例 1　求 $z=xy^3$ 的全部二阶偏导数.

解　先求一阶偏导数

$$\frac{\partial z}{\partial x}=y^3,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=3xy^2,$$

由此可以算出四个二阶偏导数

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}=3y^2,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=3y^2,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=6xy. \qquad \square$$

在例 1 中，我们发现

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

这给人们一种印象，似乎求偏导数时次序的先后无关紧要. 但是，这不永远是正确的.

例 2　定义函数

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{当 } x^2+y^2>0 \text{ 时；} \\ 0, & \text{当 } x=y=0 \text{ 时.} \end{cases}$$

证明

$$\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x\partial y}\neq\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y\partial x}.$$

证明　若 $x^2+y^2>0$，则

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\frac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=\frac{x(x^4-4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2},$$

若 $x=y=0$，则

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0,$$

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial y}=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0,$$

于是

$$\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y\partial x}=\lim_{y\to 0}\frac{1}{y}\left(\frac{\partial f(0,y)}{\partial x}-\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}\right)=\lim_{y\to 0}\left(-\frac{y}{y}\right)=-1,$$

$$\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x\partial y}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{\partial f(x,0)}{\partial y}-\frac{\partial f(0,0)}{\partial y}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{x}\right)=1,$$

可见

$$\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x\partial y}\neq\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y\partial x}.\qquad\square$$

两个偏导数

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$$

称为**混合偏导数**，我们已经从例 2 看到：一般来说，混合偏导数是与求导的次序有关的．下面的定理指出了混合偏导数与求导的次序无关的一个充分条件．

定理 14.16　设开集 $D\subset\mathbf{R}^2$，f：$D\to\mathbf{R}$．点 $\boldsymbol{p}_0\in D$，如果 f 的两个混合偏导函数在 D 上存在，并在 $\boldsymbol{p}_0$ 处连续，那么

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\boldsymbol{p}_0)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(\boldsymbol{p}_0).$$

证明　设 $\boldsymbol{p}_0=(x_0,y_0)$．对于与 $\boldsymbol{p}_0$ 邻近的一点 $(x_0+h,y_0+k)\in D$，考察

$$\Delta=f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0+k)+f(x_0,y_0).$$

对于固定的 k，令

$$\varphi(h)=f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0+h,y_0),$$

因此表达式 Δ 可以写为

$$\Delta=\varphi(h)-\varphi(0).$$

依单变量函数的微分中值定理，存在 $\theta_1\in(0,1)$ 使得

$$\Delta=\varphi'(\theta_1 h)h.$$

由于

$$\varphi'(h)=\frac{\partial}{\partial x}f(x_0+h,y_0+k)-\frac{\partial}{\partial x}f(x_0+h,y_0),$$

所以

$$\varphi'(\theta_1 h)=\frac{\partial}{\partial x}f(x_0+\theta_1 h,y_0+k)-\frac{\partial}{\partial x}f(x_0+\theta_1 h,y_0),$$

再将中值定理用到上式右边，得到

$$\varphi'(\theta_1 h)=\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}f(x_0+\theta_1 h,y_0+\theta_2 k)k,$$

这里 $\theta_2\in(0,1)$. 由此得到

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}f(x_0+\theta_1 h,y_0+\theta_2 k)hk.$$

现在再回到 Δ 的原来的表达式，用另一种方式处置它：

$$\Delta=(f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0+k))-(f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)),$$

并令

$$\psi(k)=f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0+k),$$

于是 $\Delta=\psi(k)-\psi(0)$，故有 $\theta_4\in(0,1)$使

$$\Delta=\psi'(\theta_4 k)k,$$

这里

$$\psi'(\theta_4 k)=\frac{\partial}{\partial y}f(x_0+h,y_0+\theta_4 k)-\frac{\partial}{\partial y}f(x_0,y_0+\theta_4 k),$$

对上式右边再一次用中值定理，得知有 $\theta_3\in(0,1)$使

$$\psi'(\theta_4 k)=\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}f(x_0+\theta_3 h,y_0+\theta_4 k)h.$$

因此

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}f(x_0+\theta_3 h,y_0+\theta_4 k)hk.$$

把 Δ 的两种表达式等同起来，消去双方的公因式 hk，得到

$$\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}f(x_0+\theta_1 h,y_0+\theta_2 k)=\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}f(x_0+\theta_3 h,y_0+\theta_4 k).$$

令 $h\to0$ 以及 $k\to0$，由于这两个偏导数在 $\boldsymbol{p}_0$ 处连续，我们得出

$$\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}f(\boldsymbol{p}_0)=\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}f(\boldsymbol{p}_0),$$

这正是我们需要证明的. □

由以上证明可见，对于 n 元函数f的情形，这一结论仍然正确. 在这个时候，任何

$$\frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_i \partial x_j} \quad (i \neq j)$$

都称为二阶**混合偏导数**，只要它与

$$\frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_j \partial x_i}$$

在所论点处连续，那么它们就必定相等，在这种情形下，求偏导数的先后次序就完全不必计较．其实，这一结论并不只限于二阶混合偏导数的情形．

在最一般的情形，设我们有两个 k 阶偏导数，如果它们只有求偏导数的顺序上的不同，只要这些偏导数在所论的点上连续的话，那么它们一定是相等的．

求高阶偏导数不需要新的技巧，但在求一些复合函数的高阶偏导数时，若不注意很容易漏掉某些项．请看下面的例子．

例 3　设 f，x，y 都是具有二阶连续偏导数的二元函数，记

$$u = f(x(s,t), y(s,t)).$$

求 $\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}$，$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ 和 $\frac{\partial^2 u}{\partial s \partial t}$．

解　由链式法则可得

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}.$$

在求二阶导数时，必须要注意 $\frac{\partial f}{\partial x}$，$\frac{\partial f}{\partial y}$ 仍然是 x，y 和 s，t 的复合函数，因而有

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} &= \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\ \frac{\partial x}{\partial s}\right) + \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\ \frac{\partial y}{\partial s}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial x}\ \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} + \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\ \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} \\
&= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\ \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\ \frac{\partial y}{\partial s}\right)\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial x}\ \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} \\
&\quad + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\ \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\ \frac{\partial y}{\partial s}\right)\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial s^2} \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + 2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2 \\
&\quad + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial s^2} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial s^2}.
\end{aligned}$$

用同样的方法可以求得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + 2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2$$

$$+\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2},$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial s\partial t}&=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}\right)+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}\right)\\&=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}\right)\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial t\partial s}\\&\quad+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial t}\right)\frac{\partial y}{\partial s}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial t\partial s}\\&=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial s}\right)\\&\quad+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial s}\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial s\partial t}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial s\partial t}.\qquad\square\end{aligned}$$

通过一些变量代换，有时候可以把一些含有偏导数的表达式化简，从而求得某些偏微分方程的解.

例 4　解偏微分方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial y},\quad y>0.\tag{1}$$

解　所谓解偏微分方程(1)，就是要求函数 $z=z(x,y)$，使之满足(1)，作变量代换

$$\xi=x-2\sqrt{y},\quad \eta=x+2\sqrt{y}.\tag{2}$$

在这个代换之下，x，y 的函数变成新变量 ξ，η 的函数，记为

$$z=z(x,y)=f(\xi,\eta).$$

现在来计算，在变量代换(2)之下(1)变成什么样子.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial \xi}+\frac{\partial f}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}=-\frac{\partial f}{\partial \xi}y^{-\frac{1}{2}}+\frac{\partial f}{\partial \eta}y^{-\frac{1}{2}},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2},$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}&=-\left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}(-y^{-\frac{1}{2}})+\frac{\partial^2 f}{\partial \xi\partial \eta}y^{-\frac{1}{2}}\right)y^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}y^{-\frac{3}{2}}\frac{\partial f}{\partial \xi}\right]\\&\quad+\left(-\frac{\partial^2 f}{\partial \xi\partial \eta}y^{-\frac{1}{2}}+\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}y^{-\frac{1}{2}}\right)y^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}y^{-\frac{3}{2}}\frac{\partial f}{\partial \eta}\\&=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}-2\frac{\partial^2 f}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}\right)y^{-1}+\frac{1}{2}y^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}-\frac{\partial f}{\partial \eta}\right).\end{aligned}$$

把这些表达式代入(1)即得

$$\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial \xi\partial \eta}=0.\tag{3}$$

这就是说，引入新变量 ξ，η 后，(1)变成了(3)，而(3)是很容易求解的．把(3)写成

$$\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)=0,$$

即$\frac{\partial f}{\partial \xi}$中不含有 η，可写$\frac{\partial f}{\partial \xi}=g(\xi)$，$g$ 是任一可微分的函数．由此得

$$f(\xi,\eta)=\int g(\xi)\,d\xi+\psi(\eta)=\varphi(\xi)+\psi(\eta).$$

还回到原来的变量，即得(1)的解为

$$z=\varphi(x-2\sqrt{y})+\psi(x+2\sqrt{y})$$

这里 φ，ψ 是任意两个具有二阶连续导数的单变量函数． □

练习题 14.9

1．求下列函数的二阶偏导数：

(1) $z=xy+\frac{x}{y}$；　(2) $z=\tan\frac{x^2}{y}$；

(3) $z=\log(x^2+y^2)$；　(4) $z=\arctan\frac{y}{x}$；

(5) $u=\sin(xyz)$；　(6) $u=xy+yz+zx$；

(7) $u=e^{xyz}$；　(8) $u=x^{yz}$；

(9) $u=\log(x_1+x_2+\cdots+x_n)$；

(10) $u=\arcsin({x_1}^2+{x_2}^2+\cdots+{x_n}^2)$．

2．设 $u=\arctan\frac{y}{x}$，求证：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

3．设 $u=e^{a\theta}\cos(a\log r)$，$a$ 为常数．求证：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}=0.$$

4．设 u 是 x，y，z 的函数，令

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

我们称

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

为 Laplace 算子.

(1) 设 $p=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，证明：

$$\Delta p=\frac{2}{p},\ \Delta\log p=\frac{1}{p^2},\ \Delta\left(\frac{1}{p}\right)=0,$$

其中 $p>0$.

(2) 设 $u=f(p)$，求 Δu.

5. 设 $p=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，$u=\frac{1}{p}(\varphi(p-at)+\psi(p+at))$. 证明：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\Delta u.$$

6. 解下列方程，其中 u 是 x，y，z 的函数：

(1) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$; (2) $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0$; (3) $\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}=0$.

问题 14.9

1. 求解偏微分方程

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z.$$

2. 设 a，b，c 满足 $b^2-ac>0$，λ_1，λ_2 是二次方程 $cx^2+2bx+a=0$ 的两个根. 试引进新变量

$$\xi=x+\lambda_1 y,\quad \eta=x+\lambda_2 y$$

解二阶偏微分方程

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2b\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

3. 求解二阶偏微分方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

§ 14.10 Taylor 公式

在本书第 4 章里，我们用了整章的篇幅介绍了单变量函数的 Taylor 定理以及这个定理的众多应用，相信读者对这一定理的重要性已经有了深刻的体会.

这一节介绍多变量函数的 Taylor 定理，也称 Taylor 公式.

设开集 $D\subset\mathbf{R}^n$，f: $D\to\mathbf{R}$. 函数 f 在点 $\boldsymbol{x}_0\in D$ 可微，那就是说，对于向量 $\boldsymbol{h}\in\mathbf{R}^n$，有公式

$$f(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h})=f(\boldsymbol{x}_0)+Jf(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{h}+o(\|\boldsymbol{h}\|),\ \text{当}\ \boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}\text{时}. \tag{1}$$

这个公式可以帮助我们作近似计算.

例 1　求

$$\frac{1.03^2}{\sqrt{0.98}\sqrt[3]{1.06}}$$

的近似值.

解　作函数

$$f(x,y,z)=\frac{x^2}{\sqrt{y}\sqrt[3]{z}},$$

问题归结为求 $f(1.03,0.98,1.06)$ 的近似值. 令 $\boldsymbol{p}_0=(1,1,1)$，$\boldsymbol{h}=(0.03,-0.02,0.06)$，这时 $\|\boldsymbol{h}\|=0.07$ 不算很大，因此 $f(\boldsymbol{p}_0+\boldsymbol{h})$ 可以用 $f(\boldsymbol{p}_0)+Jf(\boldsymbol{p}_0)\boldsymbol{h}$，即

$$f(\boldsymbol{p}_0)+\frac{\partial f(\boldsymbol{p}_0)}{\partial x}0.03+\frac{\partial f(\boldsymbol{p}_0)}{\partial y}(-0.02)+\frac{\partial f(\boldsymbol{p}_0)}{\partial z}0.06$$

来近似. 这个近似值是

$$1+0.06+\left(-\frac{1}{2}\right)\times(-0.02)+\left(-\frac{1}{3}\right)\times0.06=1.05.\qquad\square$$

如果我们希望把(1)的近似程度进一步提高，那就要从(1)的 $o(\|\boldsymbol{h}\|)$ 中取出比 $\|\boldsymbol{h}\|$ 高阶的项，是要得到多元函数的 Taylor 公式. 为做到这一点需要做些准备. 我们先证明下面的多项式定理，它是二项式定理的推广.

引理 14.1　设 k，n 是两个正整数，那么

$$(x_1+\cdots+x_n)^k=\sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n=k}\frac{k!}{\alpha_1!\cdots\alpha_n!}x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}, \tag{2}$$

这里 α_1，…，α_n 是非负整数.

证　对加项的个数 n 作归纳法. $n=2$ 时，它就是二项式定理，当然成立. 现设关于 $n-1$ 个加项的多项式定理成立，那么由二项式定理以及归纳假设即得

$$\begin{aligned}(x_1+\cdots+x_n)^k&=[(x_1+\cdots+x_{n-1})+x_n]^k=\sum_{\alpha_n=0}^{k}\frac{k!}{\alpha_n!(k-\alpha_n)!}(x_1+\cdots\\&\quad+x_{n-1})^{k-\alpha_n}x_n^{\alpha_n}\\&=\sum_{\alpha_n=0}^{k}\frac{k!}{\alpha_n!(k-\alpha_n)!}\sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_{n-1}=k-\alpha_n}\frac{(k-\alpha_n)!}{\alpha_1!\cdots\alpha_{n-1}!}x_1^{\alpha_1}\cdots x_{n-1}^{\alpha_{n-1}}x_n^{\alpha_n}\\&=\sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n=k}\frac{k!}{\alpha_1!\cdots\alpha_n!}x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}.\end{aligned}$$

这说明有 n 个加项时(2)也成立．引理证毕． □

为了使(2)写得更简单明了，引进下面的记号．称 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$(其中每个 α_i 都是非负整数)为一个多重指标，记

$$|\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_n,\quad \alpha!\ =\alpha_1!\ \cdots\alpha_n!,$$

如果 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)$，那么记 $x^\alpha=x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}$．这样多项式定理(2)可以简明地写成

$$(x_1+\cdots+x_n)^k=\sum_{|\alpha|=k}\frac{k!}{\alpha!}x^\alpha.$$

对于多重指标 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$，我们还引进记号

$$D^\alpha f(\boldsymbol{a})=\frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}f}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}(\boldsymbol{a}).$$

现在可以叙述并证明多元函数的 Taylor 公式了．

定理 14.17 设 $D\subset R^n$ 是一凸域，$f\in C^{m+1}(D)$．$\boldsymbol{a}=(a_1,\cdots,a_n)$和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}=(a_1+h_1,\cdots,a_n+h_n)$是 D 中两点，则必存在 $\theta\in(0,1)$，使得

$$f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})=\sum_{k=0}^{m}\sum_{|\alpha|=k}\frac{D^\alpha f(\boldsymbol{a})}{\alpha!}h^\alpha+R_m,\tag{3}$$

其中

$$R_m=\sum_{|\alpha|=m+1}\frac{D^\alpha f(\boldsymbol{a}+\theta\boldsymbol{h})}{\alpha!}h^\alpha\tag{4}$$

称为 Lagrange 余项．

证明 固定 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{h}$，让 $t\in[0,1]$，考虑[0,1]上的函数

$$\varphi(t)=f(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{h}).$$

显然 φ 在[0,1]上有 $m+1$ 阶连续导数，对 φ 用单变量函数的 Taylor 公式得

$$\varphi(1)=\varphi(0)+\varphi'(0)+\frac{1}{2!}\varphi''(0)+\cdots+\frac{1}{m!}\varphi^{(m)}(0)+\frac{1}{(m+1)!}\varphi^{(m+1)}(\theta),\tag{5}$$

其中 $\theta\in(0,1)$．

显然 $\varphi(1)=f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})$，$\varphi(0)=f(\boldsymbol{a})$．根据复合函数的求导公式得

$$\begin{aligned}\varphi'(t)&=\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{h})h_1+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{h})h_n\\&=\left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\cdots+h_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)f(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{h}).\end{aligned}$$

这就是说，对 φ 求一次导数，相当于把算子

$$h_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\cdots+h_n\frac{\partial}{\partial x_n}$$

作用于函数 $f(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{h})$．因而

$$\varphi''(t)=\left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\cdots+h_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^2 f(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{h}),$$

……

$$\varphi^{(m)}(t)=\left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\cdots+h_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^m f(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{h}).$$

根据引理 14.1，

$$\begin{aligned}\varphi^{(k)}(t)&=\left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\cdots+h_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^k f(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{h})\\&=\sum_{|\alpha|=k}\frac{k!}{\alpha!}\frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1{}^{\alpha}}\cdots\frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n{}^{\alpha_n}}f(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{h})h^{\alpha}\\&=\sum_{|\alpha|=k}\frac{k!}{\alpha!}D^{\alpha}f(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{h})h^{\alpha}.\end{aligned}$$

所以

$$\varphi^{(k)}(0)=\sum_{|\alpha|=k}\frac{k!}{\alpha!}D^{\alpha}f(\boldsymbol{a})h^{\alpha}. \tag{6}$$

把(6)代入(5)即得要证明的(3). □

在应用的时候，特别重要的是 Taylor 公式的前三项，现在把它们具体写出来：

$$\begin{aligned}f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})=f(\boldsymbol{a})&+\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{a})h_1+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{a})h_n\\&+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(\boldsymbol{a})h_ih_j+\cdots.\end{aligned}\tag{7}$$

如果记

$$Hf(\boldsymbol{a})=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\boldsymbol{a}) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_n}(\boldsymbol{a})\\ \vdots & & \vdots\\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_1}(\boldsymbol{a}) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n{}^2}(\boldsymbol{a})\end{pmatrix},$$

那么(7)可以写成

$$f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})=f(\boldsymbol{a})+Jf(\boldsymbol{a})\boldsymbol{h}+\frac{1}{2}(h_1,\cdots,h_n)Hf(\boldsymbol{a})\begin{pmatrix}h_1\\ \vdots\\ h_n\end{pmatrix}+\cdots$$

这里方阵 Hf 称为 f 的 Hessian，它是一个 n 阶对称方阵，就是说，它的转置与它自身相等.

下面的定理展示了当 $\|\boldsymbol{h}\|\to 0$ 时，余项的无穷小的量级.

定理 14.18 在定理 14.17 的条件下，我们有

$$R_m = O(\|\boldsymbol{h}\|^{m+1}),\quad \|\boldsymbol{h}\| \to 0.$$

证明　由于 $\boldsymbol{a}$ 是 D 的内点,所以可以 $\boldsymbol{a}$ 为中心作一个闭球 K,使得 $K \subset D$.而当 $\|\boldsymbol{h}\|$ 充分小时,可使 $\boldsymbol{a}+\theta\boldsymbol{h} \in K$.由于 f 的所有 $m+1$ 阶偏导数都在 K 上连续,设 M 是所有这些偏导数的绝对值在 K 上的一个上界,于是由(4)和(2)即得

$$\begin{aligned}
|R_m| &\leqslant M \sum_{|\alpha|=m+1} \frac{1}{\alpha_1!\cdots\alpha_n!}|h_1|^{\alpha_1}\cdots|h_n|^{\alpha_n} \\
&= \frac{M}{(m+1)!}\sum_{|\alpha|=m+1}\frac{(m+1)!}{\alpha_1!\cdots\alpha_n!}|h_1|^{\alpha_1}\cdots|h_n|^{\alpha_n} \\
&= \frac{M}{(m+1)!}(|h_1|+\cdots+|h_n|)^{m+1} \\
&\leqslant \frac{M}{(m+1)!}(n\|\boldsymbol{h}\|)^{m+1} \\
&= \frac{Mn^{m+1}}{(m+1)!}\|\boldsymbol{h}\|^{m+1},
\end{aligned}$$

这就是要证明的. □

练习题　14.10

1. 将下列多项式在指定点处展开成 Taylor 多项式:
   (1) $2x^2 - xy - y^2 - 6x - 3y + 5$ 在点$(1,-2)$处;
   (2) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ 在点$(1,1,1)$处.
2. 考察二次多项式

$$f(x,y,z) = (x\quad y\quad z)\begin{pmatrix} A & D & F \\ D & B & E \\ F & E & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

   试将 $f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$ 按 Δx, Δy, Δz 的正整数幂展开.
3. 将 x^y 在点$(1,1)$作 Taylor 展开,写到二次项.
4. 证明:当$|x|$和$|y|$充分小时,有近似式

$$\frac{\cos x}{\cos y} \approx 1 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2).$$

§ 14.11　极　　值

现在,我们应用 Taylor 公式来研究多元函数的极值.正如单变量函数的

极值一样，这里的极值也是一个相对的或者说是局部的概念．

定义 14.7 设 $D\subset\mathbf{R}^n$，函数 f：$D\to\mathbf{R}$，点 $\boldsymbol{p}_0\in D^\circ$，如果存在一个球 $B_r(\boldsymbol{p}_0)\subset D^\circ$，使得 $f(\boldsymbol{p})\geqslant f(\boldsymbol{p}_0)$（$f(\boldsymbol{p})>f(\boldsymbol{p}_0)$）对一切 $\boldsymbol{p}\in B_r(\check{\boldsymbol{p}}_0)$成立，那么 $\boldsymbol{p}_0$ 称为 f 的一个（**严格**）**极小值点**，而 $f(\boldsymbol{p}_0)$称为函数 f 的一个（**严格**）**极小值**．

同样定义（**严格**）**极大值点**和（**严格**）**极大值**．极小值和极大值统称**极值**．

下面的定理给出了极值点的必要条件．

定理 14.19 设 n 元函数 f 在 $\boldsymbol{p}_0$ 取得极值，且 $Jf(\boldsymbol{p}_0)$存在，那么必须有 $Jf(\boldsymbol{p}_0)=\mathbf{0}$ ．

证明 设 $\boldsymbol{p}_0=(p_1,p_2,\cdots,p_n)$．考察单变量 t 的函数 $f(p_1,\cdots,p_{i-1},t,p_{i+1},\cdots,p_n)$，$i=1,2,\cdots,n$．如果 f 在 $\boldsymbol{p}_0$ 取得极值，那么这个单变量函数必在 $t=p_i$ 上取得同样性质的极值．因此

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(p_1,\cdots,t,\cdots,p_n)\bigg|_{t=p_i}=0,$$

这正是

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p_1,\cdots,p_n)=0,\quad i=1,2,\cdots,n,$$

即 $Jf(\boldsymbol{p}_0)=\mathbf{0}$． □

D 中使得 $Jf(\boldsymbol{p})=\mathbf{0}$ 的一切内点称为函数 f 的**驻点**．由上面的定理知道，极值点一定是驻点，但一般来说驻点未必是极值点．

例如，在 $\mathbf{R}^2$ 上考察函数 $f(x,y)=xy$，这时

$$\frac{\partial f}{\partial x}=y,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=x,$$

所以(0,0)是 f 的唯一驻点．由于 $f(0,0)=0$，而在原点的任何一个邻域内，既有使 f 取正值的点（第一、三象限内的点），也有使 f 取负值的点（第二、四象限内的点），可见原点不是极值点．这说明：函数 xy 没有极值点．

例 1 在闭的三角形 $D=\{(x,y):0\leqslant x,y,x+y\leqslant\pi\}$上求函数

$$f(x,y)=\sin x\sin y\sin(x+y)$$

的最大值和最小值．

解 显然在 D 上有 $f\geqslant 0$，并且当 $\boldsymbol{p}\in\partial D$ 时 $f(\boldsymbol{p})=0$；当 $\boldsymbol{p}\in D^\circ$时 $f(\boldsymbol{p})>0$．所以最小值等于 0，在边界上达到．

连续函数 f 在有界闭集 D 上一定有使 f 取正值的最大值点存在，这种点一定在 D°中．

先求驻点

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\sin y\sin(2x+y)=0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\sin x\sin(x+2y)=0,$$

由于 $0<x<\pi$，$0<y<\pi$，所以以上两个方程等价于

$$\sin(2x+y)=0,\ \sin(x+2y)=0.$$

因为 $0<2x+y<2\pi$，$0<x+2y<2\pi$，所以

$$2x+y=\pi,\ x+2y=\pi,$$

从此解出唯一的驻点 $\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)$，它必定是最大值点，因此所求的最大值为

$$f\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3}{8}\sqrt{3}. \quad \square$$

为了得到极值点的充分条件，那就需要利用 Taylor 公式以及矩阵理论中的一些知识.

定义 14.8 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是一个 n 阶对称方阵，即 $a_{ij}=a_{ji}$ 对 i，$j=1$，2，$\cdots$，n 成立. 设

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},$$

其转置记为 $x'=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，称

$$Q(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$$

为 x_1，x_2，$\cdots$，x_n 的一个**二次型**，方阵 $\boldsymbol{A}$ 称为二次型 Q 的**系数方阵**.

如果对任何 $\boldsymbol{x}$ 恒有 $Q(\boldsymbol{x})\geqslant 0$ ($\leqslant 0$)，则称二次型 Q 是**正(负)定的**，其系数方阵 A 相应地称为**正(负)定方阵**.

如果对任何 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ 恒有 $Q(\boldsymbol{x})>0$ (<0)，则称二次型 Q 是**严格正(负)定的**，其系数方阵 A 相应地称为**严格正(负)定方阵**.

如果总存在 $\boldsymbol{p}$，$\boldsymbol{q}\in\mathbf{R}^n$，使得 $Q(\boldsymbol{p})<0<Q(\boldsymbol{q})$，就称二次型 Q 是不定的，其系数方阵 $\boldsymbol{A}$ 相应地称为不定方阵.

矩阵理论中有下列判断严格正定方阵的定理.

定理 14.20 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 为一 n 阶对称方阵. 方阵 $\boldsymbol{A}$ 为严格正定的一个必要充分条件是它的各级**顺序主子式**均大于零，也就是说，

$$a_{11}>0,$$

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}>0,$$

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}>0,$$

$$\cdots\cdots$$

$$\det\boldsymbol{A}>0.$$

读者只需记住这一结论，它的证明将在“线性代数”课程中学习到.

对称方阵 $\boldsymbol{A}$ 是严格负定的，当且只当 $(-\boldsymbol{A})$ 是严格正定的. 根据定理 14.20，方阵 $\boldsymbol{A}$ 是严格负定的必要充分条件是

$$a_{11}<0,$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}>0,$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}<0,$$

$$\cdots\cdots$$

$$(-1)^n \det \boldsymbol{A}>0.$$

由于做习题的时候常用到的是 $n=2$ 的情形，我们把这个特殊情形单独列成下列定理并加以证明.

定理 14.21　设二阶对称方阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

$\boldsymbol{A}$ 为严格正(负)定的一个必要充分条件是

$$a_{11}>0\ (a_{11}<0),$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}>0.$$

证明　只需讨论严格正定的情况. 对称方阵 $\boldsymbol{A}$ 所对应的二次型为

$$Q(\xi,\eta)=a_{11}\xi^2+2a_{12}\xi\eta+a_{22}\eta^2.$$

1°　**必要性**

取 $(\xi,\eta)=(1,0)$，所以 $Q(1,0)=a_{11}>0$. 我们有

$$Q(\xi,\eta)=a_{11}\left(\xi+\frac{a_{12}}{a_{11}}\eta\right)^2+\left(\frac{a_{11}a_{22}-a_{12}{}^2}{a_{11}}\right)\eta^2>0, \tag{1}$$

对一切不同时为 0 的 ξ，η 成立. 特别地，应有

$$Q\left(-\frac{a_{12}}{a_{11}},1\right)>0,$$

由此立得 $\det\boldsymbol{A}=a_{11}a_{22}-a_{12}{}^2>0$.

2°　**充分性**

由(1)可见 $Q(\xi,\eta)\geqslant 0$ 对一切 ξ，η 成立. 如果 $Q(\xi,\eta)=0$，必须有

$$\xi+\frac{a_{12}}{a_{11}}\eta=0,\quad \eta=0$$

同时成立，即 $\xi=\eta=0$. 由此可知 Q 是严格正定的. □

定理 14.22　设二阶对称方阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

那么 A 是不定方阵的充分必要条件是

$$a_{11}a_{22}-a_{12}^2<0.$$

证明　1°　**必要性**

如果 A 所对应的二次型

$$Q(\xi,\eta)=a_{11}\xi^2+2a_{12}\xi\eta+a_{22}\eta^2$$

是不定的，那么由定理 14.21 知道必然有

$$a_{11}a_{22}-a_{12}^2\leqslant 0.$$

如果 $a_{11}a_{22}-a_{12}^2=0$，那么必然有 $a_{11}\neq 0$. 否则 $a_{12}=0$，于是

$$Q(\xi,\eta)=a_{22}\eta^2,$$

它不是不定的. 当 $a_{11}\neq 0$ 时，由(1)得

$$Q(\xi,\eta)=a_{11}\left(\xi+\frac{a_{12}}{a_{11}}\eta\right)^2.$$

它也不是不定的. 因而必有 $a_{11}a_{22}-a_{12}^2<0$.

2°　**充分性**

设 $a_{11}a_{22}-a_{12}^2<0$，我们要证明 A 所对应的二次型是不定的.

先设 $a_{11}=0$，这时必有 $a_{12}\neq 0$. 于是

$$Q(\xi,\eta)=(2a_{12}\xi+a_{22}\eta)\eta.$$

取 $\xi_1<\dfrac{-a_{22}}{2a_{12}}$，$\xi_2>\dfrac{-a_{22}}{2a_{12}}$，则

$$Q(\xi_1,1)=2a_{12}\xi_1+a_{22}<0,$$

$$Q(\xi_2,1)=2a_{12}\xi_2+a_{22}>0.$$

这说明 $Q(\xi,\eta)$是不定的.

再设 $a_{11}\neq 0$，这时

$$Q(\xi,\eta)=a_{11}\left[\left(\xi+\frac{a_{12}}{a_{11}}\eta\right)^2+\frac{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}{a_{11}^2}\eta^2\right].$$

如果 $a_{11}>0$，那么

$$Q\left(-\frac{a_{12}}{a_{11}},1\right)=\frac{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}{a_{11}}<0,$$

$$Q(1,0)=a_{11}>0.$$

如果 $a_{11}<0$，那么

$$Q\left(-\frac{a_{12}}{a_{11}},1\right)=\frac{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}{a_{11}}>0,$$

$$Q(1,0)=a_{11}<0.$$

因而 $Q(\xi,\eta)$是不定的. □

定理 14.23 设 $\boldsymbol{x}_0$ 是函数 f 的一个驻点，函数 f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 的某一邻域内有连续的二阶偏导数.

1° 如果 Hessian $Hf(\boldsymbol{x}_0)$是严格正定(负)方阵，那么 $\boldsymbol{x}_0$ 是 f 的一个严格极小(大)值点.

2° 如果 Hessian $Hf(\boldsymbol{x}_0)$是不定方阵，那么 $\boldsymbol{x}_0$ 不是 f 的极值点.

证明 1°由于 $\boldsymbol{x}_0$ 是 f 的一个驻点，由 Taylor 公式可得

$$f(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{x}_0)=\frac{1}{2}\boldsymbol{h}'Hf(\boldsymbol{x}_0+\theta\boldsymbol{h})\boldsymbol{h},$$

其中 $\theta\in(0,1)$，把上式改写为

$$\begin{aligned}&f(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{x}_0)\\&=\frac{1}{2}\boldsymbol{h}'Hf(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{h}+\frac{1}{2}\boldsymbol{h}'(Hf(\boldsymbol{x}_0+\theta\boldsymbol{h})-Hf(\boldsymbol{x}_0))\boldsymbol{h},\end{aligned}$$

由条件可知，二次型 $\boldsymbol{h}'Hf(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{h}$ 对任何 $\boldsymbol{h}\neq\boldsymbol{0}$恒取正值. 特别地，在单位球 $\|\boldsymbol{y}\|=1$ 上，连续函数 $\boldsymbol{y}'Hf(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{y}$ 取到的最小值 $m>0$. 最小值之所以能取到，乃因单位球是一紧致集.

因此，对任何 $\boldsymbol{h}\neq\boldsymbol{0}$，我们有

$$\boldsymbol{h}'Hf(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{h}=\|\boldsymbol{h}\|^2\left(\frac{\boldsymbol{h}'}{\|\boldsymbol{h}\|}Hf(\boldsymbol{x}_0)\frac{\boldsymbol{h}}{\|\boldsymbol{h}\|}\right)\geqslant\|\boldsymbol{h}\|^2m;$$

另一方面，由于 f 的一切二阶偏导数在 $\boldsymbol{x}_0$ 处连续，对任何 ε：$0<\varepsilon<\frac{m}{n}$，总可以取 $\delta>0$，使 $0<\|\boldsymbol{h}\|<\delta$ 时

$$\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(\boldsymbol{x}_0)-\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h})\right|<\varepsilon,$$

i，$j=1$，2，…，n. 于是

$$\begin{aligned}&|\boldsymbol{h}'(Hf(\boldsymbol{x}_0+\theta\boldsymbol{h})-Hf(\boldsymbol{x}_0))\boldsymbol{h}|\\&\leqslant\|\boldsymbol{h}'\|\,\|Hf(\boldsymbol{x}_0+\theta\boldsymbol{h})-Hf(\boldsymbol{x}_0)\|\,\|\boldsymbol{h}\|\\&<\|\boldsymbol{h}\|^2\sqrt{n^2\varepsilon^2}=n\|\boldsymbol{h}\|^2\varepsilon.\end{aligned}$$

于是，当 $0<\|\boldsymbol{h}\|<\delta$ 时，

$$\begin{aligned}f(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{x}_0)&>\frac{m}{2}\|\boldsymbol{h}\|^2-\frac{n}{2}\|\boldsymbol{h}\|^2\varepsilon\\&=\|\boldsymbol{h}\|^2\left(\frac{m-n\varepsilon}{2}\right)\\&>0,\end{aligned}$$

这正说明 $\boldsymbol{x}_0$ 是 f 的一个严格极小值点.

2°由定理 14.18 得

$$f(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{x}_0)=\frac{1}{2}\boldsymbol{h}'Hf(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{h}+o(\|\boldsymbol{h}\|^2). \tag{2}$$

因为 $Hf(\boldsymbol{x}_0)$是不定方阵，故存在 $\boldsymbol{p}$，$\boldsymbol{q}\in\mathbf{R}^n$，使得

$$\boldsymbol{p}'Hf(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{p}<0<\boldsymbol{q}'Hf(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{q}.$$

在(2)中分别取 $\boldsymbol{h}$ 为 $\varepsilon\boldsymbol{p}$ 和 $\varepsilon\boldsymbol{q}$，就得

$$\begin{aligned}f(\boldsymbol{x}_0+\varepsilon\boldsymbol{p})-f(\boldsymbol{x}_0)&=\frac{1}{2}(\boldsymbol{p}'Hf(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{p})\varepsilon^2+o(\varepsilon^2)\\&=\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{p}'Hf(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{p}+o(1)\right)\varepsilon^2,\end{aligned} \tag{3}$$

$$f(\boldsymbol{x}_0+\varepsilon\boldsymbol{q})-f(\boldsymbol{x}_0)=\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{q}'Hf(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{q}+o(1)\right)\varepsilon^2, \tag{4}$$

由(3)和(4)可知，只要取 ε 充分小，就有

$$f(\boldsymbol{x}_0+\varepsilon\boldsymbol{p})<f(\boldsymbol{x}_0)<f(\boldsymbol{x}_0+\varepsilon\boldsymbol{q}).$$

这正好说明 $\boldsymbol{x}_0$ 不是 f 的极值点.　□

特别，在 $n=2$ 的情形，从定理 14.21，14.22 和 14.23 可得如下的

定理 14.24　设(x_0,y_0)是二元函数 f 的一个驻点，f 在(x_0,y_0)的某个邻域内有连续的二阶偏导数. 记

$$a=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0),\quad b=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0),\quad c=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0),$$

那么

1°当 $ac-b^2>0$，且 $a>0$ 时，f 在(x_0,y_0)处有严格极小值；

2°当 $ac-b^2>0$，且 $a<0$ 时，f 在(x_0,y_0)处有严格极大值；

3°当 $ac-b^2<0$ 时，f 在(x_0,y_0)处没有极值.

证明是显然的.　□

当 $ac-b^2=0$ 时，不能作出判断. 例如下面三个二元函数

$$x^2y^2,\quad -x^2y^2,\quad x^2y^3$$

在(0,0)点都满足 $ac-b^2=0$，其中 x^2y^2 在(0,0)取极小值，$-x^2y^2$ 在(0,0)取极大值，而 x^2y^3 在(0,0)则没有极值.

例 2　设

$$f(x,y)=2x^4+y^4-2x^2-2y^2,$$

求 f 的所有极值点.

解　建立驻点方程

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=8x^3-4x=0,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=4y^3-4y=0.$$

得到 9 个驻点，作如下编号并分成四组：

$\boxed{1.\ (0,0);}$

$\boxed{2.\ (0,1);\qquad 3.\ (0,-1);}$

$\boxed{4.\ \left(\frac{\sqrt{2}}{2},0\right);\qquad 5.\ \left(-\frac{\sqrt{2}}{2},0\right);}$

$$\boxed{\begin{array}{ll} 6.\ \left(\frac{\sqrt{2}}{2},1\right); & 7.\ \left(\frac{\sqrt{2}}{2},-1\right); \\ 8.\ \left(-\frac{\sqrt{2}}{2},1\right); & 9.\ \left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-1\right). \end{array}}$$

注意到 f 中只含 x 和 y 的偶次幂，因此只需来检查编号为 1，2，4，6 这四个点就已足够.

求二阶偏导数

$$a=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=24x^2-4,$$

$$b=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=0,$$

$$c=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=12y^2-4,$$

作表

编　　号	1	2	4	6
a	-4	-4	8	8
c	-4	8	-4	8
$ac-b^2$	16	-32	-32	64

根据定理 14.24，立刻知道(0,0)是严格极大值点，编号为 6，7，8，9 的四个点是严格极小值点，而编号为 2，3 和 4，5 的点都不是极值点. □

例 3　平面上给出 n 个数据点 (x_i,y_i)，$i=1,2,\cdots,n$，求一条直线 $y=ax+b$ 使得偏差

$$\sum_{i=1}^{n}(ax_i+b-y_i)^2$$

为最小.

解　应当认为 x_1，x_2，…，x_n 互不相等. 当我们把这 n 个数据点画在坐标系中，如果发现它们近似地分布在一条直线上，就可以提出这样的要求：求出一条逼近这些数据的一次函数. 这种方法称为“**最小二乘法**”，也可以叫做

“**经验配线**”．把未知的系数 a，b 看成独立变量，作函数

$$\varphi(a,b)=\sum_{i=1}^{n}(ax_i+b-y_i)^2,$$

它的定义域是 $\mathbf{R}^2$．求驻点，得到

$$\frac{\partial\varphi}{\partial a}(a,b)=2\sum_{i=1}^{n}(ax_i+b-y_i)x_i=0, \tag{5}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial b}(a,b)=2\sum_{i=1}^{n}(ax_i+b-y_i)=0, \tag{6}$$

由此得出关于 a，b 的线性代数方程组

$$\Big(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\Big)a+\Big(\sum_{i=1}^{n}x_i\Big)b=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i,$$

$$\Big(\sum_{i=1}^{n}x_i\Big)a+nb=\sum_{i=1}^{n}y_i.$$

Cauchy-Schwarz 不等式告诉我们

$$\Big(\sum_{i=1}^{n}x_i\Big)^2=\Big(\sum_{i=1}^{n}1\cdot x_i\Big)^2<\sum_{i=1}^{n}1^2\sum_{i=1}^{n}x_i^2=n\sum_{i=1}^{n}x_i^2, \tag{7}$$

其中严格的不等号来自于 x_1，x_2，…，x_n 互不相等．由此可知，线性方程组的系数行列式不等于零，所以有唯一的解，即有唯一的驻点．但是，这个驻点是不是极值点，是极大值点还是极小值点，还有待进一步研究．计算二阶导数：

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial a^2}(a,b)=2\sum_{i=1}^{n}x_i^2,$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial a\partial b}(a,b)=2\sum_{i=1}^{n}x_i,$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial b^2}(a,b)=2n,$$

故 Hessian 是

$$2\begin{pmatrix}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 & \sum_{i=1}^{n}x_i\\ \sum_{i=1}^{n}x_i & n\end{pmatrix},$$

由于 $\sum_{i=1}^{n}x_i^2>0$ 以及不等式(7)，得知这是一个严格正定的方阵，所以这唯一的驻点就是最小值点．

由(5)与(6)可知，所求直线的方程是

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} y_i & n \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i y_i & \sum_{i=1}^{n} x_i \end{vmatrix} = 0,$$

它是由数据点(x_i, y_i)，$i = 1, 2, \cdots, n$ 完全确定的.

例如，我们有三个数据点

$$(0,0),\ (1,2),\ (2,2),$$

那么经验配线就是

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 5 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 0,$$

即 $3x - 3y + 1 = 0$.

练习题 14.11

1. 求下列函数的极值：

   (1) $f(x,y) = 4(x-y) - x^2 - y^2$;

   (2) $f(x,y) = x^2 - 3x^2y + y^3$;

   (3) $f(x,y) = x^2 + (y-1)^2$;

   (4) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

2. 求函数 $f(x,y) = xy\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$ $(a>0, b>0)$的极值.

3. 求函数 $f(x,y) = \sin x + \cos y + \cos(x-y)$在正方形$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]^2$ 上的极值.

4. 设 $f(x,y) = 3x^4 - 4x^2y + y^2$. 证明：限制在每一条过原点的直线上，原点是 f 的极小值点，但是函数 f 在原点处不取极小值.

   在 xy 平面上，画出点集

   $$P = \{(x,y): f(x,y) > 0\}, \quad Q = \{(x,y): f(x,y) < 0\}.$$

§ 14.12 条件极值

从一个最简单的例子说起.

要做一个体积为 2 的长方体盒子，问做成怎样的尺寸才能使表面积最小.

设这个长方体的长、宽、高分别为 x，y，$z>0$，它们满足条件 $xyz=2$. 用 S 表示这个长方体的表面积，易见

$$S=2(xy+yz+zx).$$

现在的问题是：在条件 $xyz=2$ 之下，求 S 的最小值. 很自然的想法是从条件中解出

$$z=\frac{2}{xy},$$

代入 S 的右边，消去变量 z 得到

$$S=2\left(xy+\frac{2}{x}+\frac{2}{y}\right),$$

然后在 Oxy 坐标系的第一象限内求 S 的最小值点. 事到如今，已经没有任何条件限制，只需把 S 当成二元函数，按照前节求普通极值点的方法来处理.

这个例子虽然十分简单，但它所展开的方案对于处理所谓"条件极值"有着普遍的指导意义. 那就是说，从"限制条件"中解出一批变量，然后代入"目标函数"中去，转化成为普通极值的问题. 当然，当条件比较复杂的时候，真正地"解出"往往是做不到的，这时实际上是要利用隐映射定理. 下列求解条件极值的方法，是隐映射定理的一个很好的应用.

一般来说，设 D 是 $\mathbf{R}^{m+n}$中的开集，

$$f(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_m) \tag{1}$$

是定义在 D 上的一个函数. 现在设变量 x_1，$\cdots$，x_n，y_1，$\cdots$，y_m 受到下列 m 个条件的约束：

$$\begin{cases}\Phi_1(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_m)=0,\\ \cdots\cdots\\ \Phi_m(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_m)=0.\end{cases} \tag{2}$$

我们的问题是要求函数(1)在约束条件(2)之下的极值. 这就是条件极值问题.

刚才已经提到，从原则上来说，我们可以从方程组(2)中把变量 y_1，$\cdots$，y_m 都解成 x_1，$\cdots$，x_n 的函数，然后代入到(1)中去，把它变成变量 x_1，$\cdots$，x_n 的无条件极值问题. 但在实际操作中，这往往是行不通的，原因是要从(2)把 y_1，$\cdots$，y_m 解成 x_1，$\cdots$，x_n 的函数是十分困难的.

下面的 Lagrange 乘数法是解决条件极值问题的一个有效方法. 其基本思想是这样的：作一个辅助函数

$$F(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_m)=f(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_m)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\Phi_i(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_m), \tag{3}$$

其中 λ_1，…，λ_m 是 m 个待定常数．可以证明，如果$(a_1,\cdots,a_n,b_1,\cdots,b_m)$是函数(1)的满足条件(2)的一个极值点，那么一定存在$(\lambda_1,\cdots,\lambda_m)\in\mathbf{R}^m$，使得$(a_1,\cdots,a_n,b_1,\cdots,b_m)$是函数(3)的一个驻点．那就是下面的

定理 14.25 如果目标函数(1)在条件(2)的约束下，在点 $z_0=(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)=(a_1,\cdots,a_n,b_1,\cdots,b_m)$取到极值，那么存在 $\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_1,\cdots,\lambda_m)\in\mathbf{R}^m$，使得$(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)$是函数

$$F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\Phi_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$$

的驻点．也就是说$(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)$满足方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)+\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\frac{\partial\Phi_i}{\partial x_k}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)=0, & k=1,\cdots,n,\\ \dfrac{\partial f}{\partial y_j}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)+\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\frac{\partial\Phi_i}{\partial y_j}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)=0, & j=1,\cdots,m.\end{cases}$$

在给出这一定理的证明之前，我们先来看几个例子．

例 1 在 x，y，$z>0$ 以及条件

$$xyz=2$$

下，求函数

$$S(x,y,z)=2(xy+yz+zx)$$

的极值点．

解 这时，$D=\{(x,y,z):x>0,y>0,z>0\}$，限制条件是一个方程

$$\varphi(x,y,z)=xyz-2=0.$$

作函数

$$\psi(x,y,z)=S(x,y,z)+\lambda\varphi(x,y,z),$$

把 λ 看成常数，令

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=\frac{\partial S}{\partial x}+\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x}=2(y+z)+\lambda yz=0,$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}=\frac{\partial S}{\partial y}+\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial y}=2(z+x)+\lambda zx=0,$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial z}=\frac{\partial S}{\partial z}+\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial z}=2(x+y)+\lambda xy=0,$$

用 x，y，z 分别乘以上三式，得出

$$x(y+z)=y(z+x)=z(x+y),$$

也就是 $xz=yz=xy$，由于 x，y，z 都是正数，所以 $x=y=z=\sqrt[3]{2}$．这就是说，在本节导言中提到的那个盒子，必须做成立方体才能使它的表面积最小． □

必须指出，上述解法只是演示如何用 Lagrange 乘数法来解条件极值问题，不意味着这是一种方便的、简单的方法．事实上，如果利用算术平均—几何平

均不等式，将有十分初等的解法．由

$$\frac{S}{2}=xy+yx+zx\geqslant 3\sqrt[3]{(xy)(yz)(zx)}=3\sqrt[3]{(xyz)^2}=3\sqrt[3]{4},$$

也就是 $S\geqslant 6\sqrt[3]{4}$．这说明，不论盒子的尺寸如何，其表面积不会小于 $6\sqrt[3]{4}$，取得这个最小值是可能的，只需 $xy=yz=zx$，即 $x=y=z=\sqrt[3]{2}$．

例 2　限制点在圆周

$$(x-1)^2+y^2=1$$

上变化时，求函数 $f(x,y)=xy$ 的最小值和最大值．

解　这时 $D=\mathbf{R}^2$．置

$$\varphi(x,y)=(x-1)^2+y^2-1,$$

作函数

$$\psi(x,y)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y),$$

视 λ 与 x，y 无关．令

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x}=y+2\lambda(x-1)=0,$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial y}=x+2\lambda y=0.$$

由此得出

$$x^2+y^2=4\lambda^2[(x-1)^2+y^2]=4\lambda^2,$$

而 $\varphi=0$ 相当于 $x^2+y^2=2x$，所以 $x=2\lambda^2$，$\lambda y=-\lambda^2$．如果 $\lambda=0$ 得出 $(x,y)=(0,0)$，这显然不是一个极值点，因为 $f(0,0)=0$，而在第一象限 $f>0$，在第四象限 $f<0$．故应设 $\lambda\neq 0$，由此得出 $y=-\lambda$，从而 $x=2y^2$．我们有 $x^2=\frac{3}{2}x$，从而 $x=\frac{3}{2}$．考虑以下两点：

$$\left(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\ \left(\frac{3}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

由于连续函数 f 在圆周(有界闭集)上必取到最小值和最大值，所以

$$f\left(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{3}{4}\sqrt{3}$$

是最大值，而

$$f\left(\frac{3}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{3}{4}\sqrt{3}$$

是最小值．□

同前例一样，本题也有初等的解法．考察

$$f^2=x^2y^2=x^2(2x-x^2)=x^3(2-x)=\frac{1}{3}x^3(6-3x),$$

显然 $0\leqslant x\leqslant 2$，利用算术平均—几何平均不等式

$$x^3(6-3x)=x\cdot x\cdot x(6-3x)\leqslant\left[\frac{x+x+x+(6-3x)}{4}\right]^4=\left(\frac{3}{2}\right)^4,$$

所以

$$f^2\leqslant\frac{3^3}{4^2},\quad |f|\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{4},$$

式中等号当且只当 $x=6-3x$，即 $x=\frac{3}{2}$时成立.

例 3 求椭圆

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1,\\ Ax+By+Cz=0\end{cases}\tag{4}$$

的半轴之长.

解 第一个方程表示中心在原点的一张椭球面，第二个方程表示一张过原点的平面，它们交成一个椭圆. 令

$$r^2=f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2,$$

它代表空间中点(x,y,z)到原点的距离的平方. 在条件(4)中的两个方程的限制之下，应求函数 r 的最小值和最大值. 令

$$\varphi_1(x,y,z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1,$$

$$\varphi_2(x,y,z)=Ax+By+Cz,$$

再置

$$\psi=f+\lambda_1\varphi_1+\lambda_2\varphi_2,$$

建立方程

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=0,\quad\frac{\partial\psi}{\partial y}=0,\quad\frac{\partial\psi}{\partial z}=0,$$

这也就是

$$\begin{cases}2x+2\lambda_1\dfrac{x}{a^2}+\lambda_2A=0,\\ 2y+2\lambda_1\dfrac{y}{b^2}+\lambda_2B=0,\\ 2z+2\lambda_1\dfrac{z}{c^2}+\lambda_2C=0.\end{cases}\tag{5}$$

用 x，y，z 依次乘以(5)的三式并相加，得到

$$r^2+\lambda_1=0.$$

从方程(5)解出

$$2x=\frac{Aa^2}{r^2-a^2}\lambda_2,\ 2y=\frac{Bb^2}{r^2-b^2}\lambda_2,\ 2z=\frac{Cc^2}{r^2-c^2}\lambda_2,$$

用 A，B，C 分别乘以上三式然后相加，得到

$$\frac{A^2a^2}{r^2-a^2}+\frac{B^2b^2}{r^2-b^2}+\frac{C^2c^2}{r^2-c^2}=0,$$

由最后一个方程解出 r^2，可以求得 r 的最小值和最大值． □

现在给出定理 14.25 的证明．证明这一定理的主要工具是隐映射定理(定理 14.13)．为此我们把定理 14.25 用向量的形式严格地重新叙述如下：

定理 14.25　设开集 $D\subset\mathbf{R}^{n+m}$，函数 f：$D\to\mathbf{R}$，映射 $\boldsymbol{\Phi}$：$D\to\mathbf{R}^m$．函数 f 与映射 $\boldsymbol{\Phi}$ 满足以下条件：

(i) f，$\boldsymbol{\Phi}\in C^1(D)$；

(ii) 存在 $z_0=(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)\in D$，满足 $\boldsymbol{\Phi}(z_0)=\mathbf{0}$，其中 $\boldsymbol{x}_0=(a_1,\cdots,a_n)$，$\boldsymbol{y}_0=(b_1,\cdots,b_m)$；

(iii) $\det J_y\boldsymbol{\Phi}(z_0)\neq 0$.

如果 f 在条件(2)的约束下在 $z_0=(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)$处取到极值，那么存在 $\boldsymbol{\lambda}\in\mathbf{R}^m$，使得

$$Jf(z_0)+\boldsymbol{\lambda}J\boldsymbol{\Phi}(z_0)=\mathbf{0}. \tag{6}$$

证明　由于 $\boldsymbol{\Phi}$ 满足(i),(ii),(iii)三个条件，根据隐映射定理，存在 $z_0=(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)$的邻域 $U=G\times H$，其中 G 和 H 分别是$\boldsymbol{x}_0$ 和 $\boldsymbol{y}_0$ 的邻域，使得方程

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\mathbf{0}$$

对任意 $\boldsymbol{x}\in G$，在 H 中有唯一解 $\varphi(\boldsymbol{x})$，并且适合 $\boldsymbol{y}_0=\varphi(\boldsymbol{x}_0)$且 $J\varphi(\boldsymbol{x}_0)=-(J_y\boldsymbol{\Phi}(z_0))^{-1}J_x\Phi(z_0)$．因为 $z_0=(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)$是 f 在条件(2)的约束下的极值点，因此 $\boldsymbol{x}_0$ 便是函数 $f(\boldsymbol{x},\varphi(\boldsymbol{x}))$在 G 中的一个极值点，所以 $\boldsymbol{x}_0$ 必是 $f(\boldsymbol{x},\varphi(\boldsymbol{x}))$的一个驻点．由复合求导公式得知

$$J_xf(z_0)+J_yf(z_0)J\varphi(\boldsymbol{x}_0)=\mathbf{0}.$$

把 $J\varphi(\boldsymbol{x}_0)=-(J_y\boldsymbol{\Phi}(z_0))^{-1}J_x\boldsymbol{\Phi}(z_0)$代入上式，即得

$$J_xf(z_0)-J_yf(z_0)(J_y\boldsymbol{\Phi}(z_0))^{-1}J_x\boldsymbol{\Phi}(z_0)=\mathbf{0}. \tag{7}$$

记

$$\boldsymbol{\lambda}=-J_yf(z_0)(J_y\boldsymbol{\Phi}(z_0))^{-1}, \tag{8}$$

它是一个 m 维向量，(6)就变成

$$J_xf(z_0)+\boldsymbol{\lambda}J_x\boldsymbol{\Phi}(z_0)=\mathbf{0}. \tag{9}$$

再把(8)改写为

$$J_yf(z_0)+\boldsymbol{\lambda}J_y\boldsymbol{\Phi}(z_0)=\mathbf{0}. \tag{10}$$

(9)与(10)可以合并写为

$$Jf(z_0)+\boldsymbol{\lambda} J\boldsymbol{\Phi}(z_0)=\mathbf{0}.$$

这就是我们要证明的(6). □

下面是判断条件极值的充分条件.

定理 14.26 设 z_0 是辅助函数

$$F(z)=f(z)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\Phi_i(z)$$

的驻点，其中 $z=(z_1,\cdots,z_{n+m})=(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_m)$. 记

$$HF(z_0)=\left(\frac{\partial^2 F}{\partial z_j\partial z_k}(z_0)\right)_{1\leqslant j,k\leqslant m+n}.$$

(ⅰ) 如果 $HF(z_0)$ 严格正定，那么 f 在 z_0 取严格的条件极小值；

(ⅱ) 如果 $HF(z_0)$ 严格负定，那么 f 在 z_0 取严格的条件极大值.

证 记 E 是 $\mathbf{R}^{m+n}$中满足条件(2)的点的全体，即

$$E=\{z\in\mathbf{R}^{m+n}:\Phi_i(z)=0,\ i=1,\ \cdots,\ m\}.$$

已知 $z_0\in E$，再在 z_0 附近取点 $z_0+\boldsymbol{h}\in E$，由于

$$\Phi_i(z_0)=0,\ \Phi_i(z_0+\boldsymbol{h})=0,\ i=1,\ \cdots,\ m,$$

所以

$$F(z_0)=f(z_0),\ F(z_0+\boldsymbol{h})=f(z_0+\boldsymbol{h}).$$

于是对 F 用 Taylor 公式得

$$\begin{aligned}f(z_0+\boldsymbol{h})-f(z_0)&=F(z_0+\boldsymbol{h})-F(z_0)\\&=\sum_{j=1}^{m+n}\frac{\partial F}{\partial z_j}(z_0)h_j+\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{m+n}\frac{\partial^2 F}{\partial z_j\partial z_k}(z_0)h_jh_k+o(\|\boldsymbol{h}\|^2)\\&=\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{m+n}\frac{\partial^2 F}{\partial z_j\partial z_k}(z_0)h_jh_k+o(\|\boldsymbol{h}\|^2),\end{aligned}$$

这里已经利用了 z_0 是 F 的驻点的条件. 剩下的证明与定理 14.23 完全一样，不再细述. □

和定理 14.23 不同的是，当 $HF(z_0)$不定时，f 仍有可能取得条件极值. 例如

$$f(x,y,z)=x^2+y^2-z^2,$$
$$\Phi(x,y,z)=z=0.$$

这时

$$F(x,y,z)=x^2+y^2-z^2+\lambda z.$$

容易知道

$$\frac{\partial F}{\partial x}=2x,\ \frac{\partial F}{\partial y}=2y,\ \frac{\partial F}{\partial z}=-2z+\lambda.$$

让

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial F}{\partial z}=0$$

以及约束条件 $z=0$，即得 $x=y=z=0$，$\lambda=0$.

因而$(x,y,z)=(0,0,0)$是 F 的一个驻点. 这时

$$\frac{\partial F}{\partial x}=2x,\ \frac{\partial F}{\partial y}=2y,\ \frac{\partial F}{\partial z}=-2z.$$

因而

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=2,\ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=2,\ \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}=-2,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial z}=\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial z}=0.$$

F 的 Henssian 为

$$HF=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&-2\end{pmatrix}.$$

这是一个不定的对称方阵. 但 f 在$(x,y,z)=(0,0,0)$确实取到了条件极小值.

例 4　设 $\alpha_i>0$，$x_i>0$，$i=1$，…，n，证明

$$x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}\leqslant\left(\frac{\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_nx_n}{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}\right)^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}.\tag{11}$$

等号成立当且仅当　$x_1=\cdots=x_n$.

证明　考虑

$$f(x_1,\cdots,x_n)=\log(x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n})=\sum_{i=1}^n\alpha_i\log x_i$$

在条件

$$\sum_{i=1}^n\alpha_ix_i=c\tag{12}$$

下的条件极值，其中 c 是任意一个正的常数. 用 Lagrange 乘数法，作辅助函数

$$F(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^n\alpha_i\log x_i+\lambda\Big(\sum_{i=1}^n\alpha_ix_i-c\Big).$$

那么

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}=\frac{\alpha_i}{x_i}+\lambda\alpha_i=0,\ i=1,\ \cdots,\ n.$$

为了确定 λ 的值，在等式

$$\frac{\alpha_i}{x_i}=-\lambda\alpha_i,\ i=1,\ \cdots,\ n$$

两端乘以 x_i 再相加得

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i = -\lambda\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i = -\lambda c,$$

所以 $-\dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{c}{\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i}$，于是

$$x_i = \frac{c}{\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i}, i = 1,\cdots,n. \tag{13}$$

这就是驻点 z_0 的坐标．为了验证它是否取得了条件极值，从 $\dfrac{\partial F}{\partial x_i} = \dfrac{\alpha_i}{x_i} + \lambda\alpha_i$ 可得

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_i\partial x_j} = -\frac{\alpha_i}{x_i^2}\delta_{ij},$$

因而

$$HF(z_0) = -\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i\right)^2}{c^2}\begin{pmatrix}\alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n\end{pmatrix}.$$

由于 $\alpha_i > 0$，$i = 1$，…，n，所以 $HF(z_0)$ 严格负定，由定理 14.26，f 在 z_0 处取严格的条件极大，由 z_0 的唯一性知其为严格的最大．于是得

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\log x_i < \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\log\frac{c}{\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i}, \tag{14}$$

不等式左端的 x_1，…，x_n 满足条件(12)且不全相等，因为满足条件(12)且都相等的 x_1，…，x_n 就是(13)，它就是驻点 z_0 的坐标．从(14)即得

$$x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n} < \left(\frac{\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}\right)^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}.$$

要上面的不等式变成等式只有 $x_1 = \cdots = x_n$，因此(11)的等号仅当 $x_1 = \cdots = x_n$ 时才成立，而当 $x_1 = \cdots = x_n$ 时(11)的等号成立则是显然的． □

练习题 14.12

1. 求在指定条件下 u 的极值：

(1) $u = xy$，$x + y = 1$；

(2) $u=\cos^2 x+\cos^2 y$，$x-y=\dfrac{\pi}{4}$；

(3) $u=x-2y+2z$，$x^2+y^2+z^2=1$；

(4) $u=3x^2+3y^2+z^2$，$x+y+z=1$.

2. 设 $a>0$，求曲线

$$\begin{cases} x^2+y^2=2az, \\ x^2+y^2+xy=a^2 \end{cases}$$

上的点到 xy 平面的最小距离和最大距离.

3. 在椭球

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

内嵌入有最大体积的长方体，问这长方体的尺寸如何？

4. 设 $a_i\geqslant 0$，$p>1$，证明

$$\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\leqslant\left(\frac{a_1^p+\cdots+a_n^p}{n}\right)^{\frac{1}{p}},$$

讨论等号成立的条件.

5. 试用求条件极值的方法证明 Hölder 不等式：

设 $a_i\geqslant 0$，$x_i\geqslant 0$，$i=1,\cdots,n$，$p>1$，$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$，那么

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i\leqslant\left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^n x_i^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

讨论等号成立的条件.

第 15 章　曲面的表示与逼近

在这一章里，我们将要介绍 $\mathbf{R}^3$ 中的曲面的各种表示法，那就是，用显函数、隐函数和参数向量方程来表示曲面. 此外，还要简明地提及逼近曲面的问题，以及自由型曲面设计问题. 需要用到的工具是第 13 章和第 14 章的内容，即多元函数及其微分学.

§15.1　曲面的显式方程和隐式方程

设有界闭区域 $D\subset\mathbf{R}^2$，函数 f: $D\to\mathbf{R}$ 连续. 我们称函数 f 的图像

$$G(f)=\{(x,y,f(x,y))\in\mathbf{R}^3:(x,y)\in D\}$$

为一张曲面，它展布在 D 上，称这曲面是由**显式方程**

$$z=f(x,y),\quad (x,y)\in D \tag{1}$$

所确定的.

例 1　中心在三维坐标的原点、半径为 a、在 xy 平面上方的那个半球面(称为上半球面)，有显式方程

$$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2},\quad (x,y)\in D,$$

其中 $D=\{(x,y):x^2+y^2\leqslant a^2\}$，即 D 是 xy 平面上以原点为中心、半径为 a 的圆盘. □

例 2　点集

$$\{(x,y,z):x,y,z\geqslant 0,x+y+z=1\}$$

是 $\mathbf{R}^3$ 中的一块等边三角形，这块曲面有显式表达 $z=1-x-y$，$(x,y)\in D$,其中 $D=\{(x,y):x,y\geqslant 0,x+y\leqslant 1\}$(图 15-1). □

例 3　$z=xy,(x,y)\in\mathbf{R}^2$. 在解析几何中，这张曲面称为**双曲抛物面**. 由于这曲面在 xy 平面上的第一、第三象限中，在 xy 平面的上方，而在第二、第四象限中是在 xy 平面的下方，因此在原点(0,0,0)的近旁，曲面呈马鞍的形状，俗称**马鞍面**，见图 15-2. □

例 4　旋转曲面

设想在 xz 平面上有一条显式曲线 $z=f(x),0\leqslant x\leqslant b$.如果固定 z 轴不动,让 xz 平面绕着 z 轴旋转 360°,那么这一条曲线就扫出一张曲面,称为**旋转曲面**.由

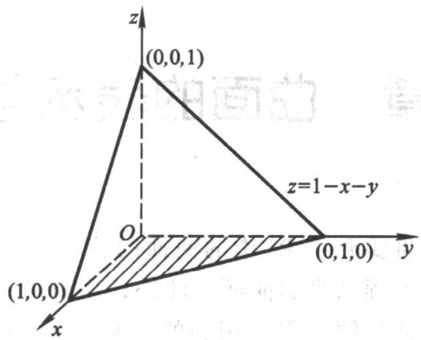


图　15 - 1

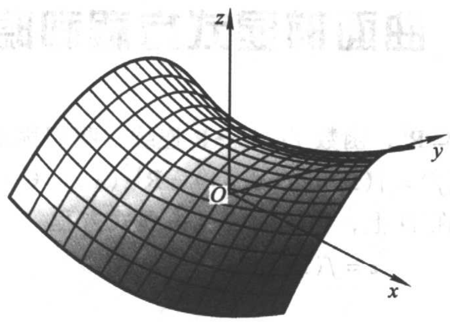


图　15 - 2

于 xy 平面上、以原点为中心的圆周上的任一点到这曲面上的对应点的距离相等，显然，这旋转曲面有显式表达式

$$z=f(\sqrt{x^2+y^2}),(x,y)\in D=\{(x,y):x^2+y^2\leqslant b^2\}.$$

曲线

$$\begin{cases} z=f(x), & 0\leqslant x\leqslant b, \\ y=0 \end{cases}$$

称为这旋转曲面的**发生线**．为了了解旋转曲面的几何形态，通常看一看发生线的形状就足够了．曲面(图 15 - 3)

$$z=\sqrt{x^2+y^2},\quad (x,y)\in \mathbf{R}^2,$$

和曲面(图 15 - 4)

$$z=x^2+y^2,\quad (x,y)\in \mathbf{R}^2,$$

都是旋转曲面，但是它们的几何形态是全然不同的，第一个曲面是**锥面**，因为它的发生线是直线 $z=x(x\geqslant 0,y=0)$；第二个曲面是**抛物面**，因为它的发生线是抛物线 $z=x^2(x\geqslant 0,y=0)$．□

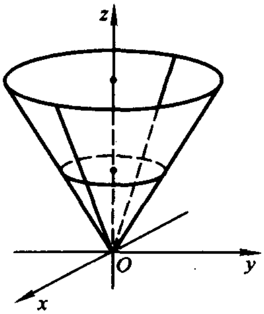


图 15-3

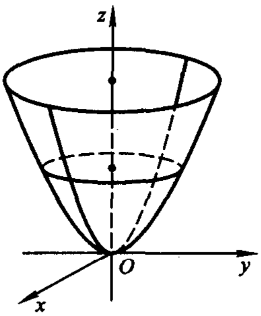


图 15-4

有显式表达式的曲面$z=f(x,y),(x,y)\in D$有自身的优点，那就是：计算曲面上的点比较容易．取$(x_0,y_0)\in D$，计算函数值$f(x_0,y_0)$，那么$\boldsymbol{p}_0=(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$就是曲面上的一个点．如果画出许许多多这样的点，就能得到这块曲面的一个大致的轮廓．显式曲面的最大的缺点是，任何平行于 z 轴的直线，至多只能同曲面相交于一个点，因此，它就不能表达封闭的曲面，除非将封闭曲面进行分块．例如说，对中心在原点、半径为 a 的球面，用一个显式方程是不可能表示它的，除非把它分成上半球面

$$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2},\qquad x^2+y^2\leqslant a^2$$

和下半球面

$$z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2},\qquad x^2+y^2\leqslant a^2.$$

但是，我们用一个方程

$$x^2+y^2+z^2-a^2=0$$

就可以表达完整的球面．这就是用隐式表达的一个例子．

设三元函数 F 定义在区域$D\subset\mathbf{R}^3$．区域 D 中所有满足方程

$$F(x,y,z)=0 \tag{2}$$

的点集组成一张曲面，称为由方程(2)所确定的隐式曲面．为了使(2)能确定一张真正有意思的曲面，不能不对 F 加一些限制，例如说，设 F 在 D 上是连续的，甚至还要加上三个偏导数$\dfrac{\partial F}{\partial x}$，$\dfrac{\partial F}{\partial y}$，$\dfrac{\partial F}{\partial z}$也在 D 上连续的条件．

与显式曲面相比较，要确定隐式曲面上的点，通常要来解方程(2)．当函数 F 比较复杂的时候，解方程的工作就不是那么轻松的．

我们指出隐式曲面的一个优点．设想$F\in C(D)$，方程(2)表达一张封闭曲面．这时曲面就把全空间 $\mathbf{R}^3$ 分成三个部分，一个是曲面的本身，另外两个是曲面的外部和内部．把这两部分的点代入 F 将不等于零，而且所有内部的点

代入 F，其值必取同样符号(不妨说是正号)，那么将曲面外部的点代入 F，必取负值．这个事实，使得我们很容易来区分曲面的内外，在**计算机图形学**中，这是很有意义的事．

下面讨论曲面的切平面．

设 $\boldsymbol{p}_0=(x_0,y_0,z_0)\in D$ 是隐式曲面(2)上的一点．任意作一条过点 $\boldsymbol{p}_0$ 的曲面上的曲线 Γ，设 Γ 有参数方程

$$x=x(t),y=y(t),z=z(t),$$

并且参数 t_0 对应着点 $\boldsymbol{p}_0$．将参数方程的三个分量代入(2)，得到一个关于 t 的恒等式

$$F(x(t),y(t),z(t))\equiv 0 .$$

对上式双方在 t_0 处求导，得到

$$\frac{\partial F}{\partial x}(\boldsymbol{p}_0)x'(t_0)+\frac{\partial F}{\partial y}(\boldsymbol{p}_0)y'(t_0)+\frac{\partial F}{\partial z}(\boldsymbol{p}_0)z'(t_0)=0 .$$

用向量的内积来表示，上式乃是

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}(\boldsymbol{p}_0),\frac{\partial F}{\partial y}(\boldsymbol{p}_0),\frac{\partial F}{\partial z}(\boldsymbol{p}_0)\right)\cdot(x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0))=0 .$$

这表明：曲线 Γ 在点 $\boldsymbol{p}_0$ 的切向量与向量

$$JF(\boldsymbol{p}_0)=\left(\frac{\partial F}{\partial x}(\boldsymbol{p}_0),\frac{\partial F}{\partial y}(\boldsymbol{p}_0),\frac{\partial F}{\partial z}(\boldsymbol{p}_0)\right) \tag{3}$$

垂直．由于 Γ 是曲面上过点 $\boldsymbol{p}_0$ 的任一条曲线，而(3)是一个固定的向量，这就表明：曲面上过点 $\boldsymbol{p}_0$ 的任何曲线在点 $\boldsymbol{p}_0$ 的切线是共面的，这个平面称为曲面(2)在点 $\boldsymbol{p}_0$ 的**切平面**，而向量(3)称为曲面(2)在 $\boldsymbol{p}_0$ 点处的一个**法向量**．

所以，曲面(2)在 $\boldsymbol{p}_0=(x_0,y_0,z_0)$ 处的切平面的方程是

$$(x-x_0)\frac{\partial F}{\partial x}(\boldsymbol{p}_0)+(y-y_0)\frac{\partial F}{\partial y}(\boldsymbol{p}_0)+(z-z_0)\frac{\partial F}{\partial z}(\boldsymbol{p}_0)=0, \tag{4}$$

这里 (x,y,z) 是切平面上的流动坐标．

例如，考察球面

$$F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-a^2=0 ,$$

在点 (x_0,y_0,z_0) 处，由(3)可得法向量 (x_0,y_0,z_0)．这是一个指向球外的法向量，可以叫做**外法向量**．为了求球的切平面方程，由(4)可得

$$(x-x_0)x_0+(y-y_0)y_0+(z-z_0)z_0=0 ,$$

注意到 (x_0,y_0,z_0) 是球面上的点，上式又可写作

$$x_0x+y_0y+z_0z=a^2,$$

这是球面过点 (x_0,y_0,z_0) 的切平面方程．

由于显式曲面的方程(1)总可以转化为隐式方程

$$F=z-f(x,y)=0,\quad (x,y)\in D ,$$

任取$(x_0,y_0)\in D$,再置$z_0=f(x_0,y_0)$，依(3)可得曲面的一个法向量

$$\left(-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0),-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0),1\right),\tag{5}$$

由(5)看出：这法向量的第三个分量为1，所以它同z轴的正向的夹角不超过$\frac{\pi}{2}$，可以称(5)为**上法向量**，相应地

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0),\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0),-1\right)$$

可称为曲面(1)的**下法向量**，这两个法向量只是有相反的方向，所以它们都垂直于过$\boldsymbol{p}_0=(x_0,y_0,z_0)$的切平面．这时，切平面的方程为

$$z-f(x_0,y_0)=(x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)+(y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0).\tag{6}$$

现在提出这样的问题：在一定的范围内，一张隐式曲面是不是可以化为显式曲面来研究呢？在一定的条件下，这是可以办得到的．设F和它的三个偏导数都是D上的连续函数，并且法向量(3)不是零向量．这时，法向量(3)的三个分量中至少有一个不等于零，不妨设$\frac{\partial F}{\partial z}(\boldsymbol{p}_0)\neq 0$．根据隐函数存在定理(定理14.11)，存在$xy$平面上点$(x_0,y_0)$的一个邻域$H$和$z$轴上$z_0$的一个邻域$K$，使得当$(x,y)\in H$时，方程$F(x,y,z)=0$在$K$中有唯一解$z$，这一关系记为$z=f(x,y),(x,y)\in H$．这就是说，在点$(x_0,y_0,z_0)$的一个邻域内，隐式曲面可以解成显式曲面．

关于显式曲面和隐式曲面，我们到此已经作过详细的比较和说明．但是，无论在理论研究或实际应用中，被广泛使用的还是向量参数曲面，这正是下一节将要介绍的内容．

练习题 15.1

1. 求出下列曲面在指定点处的法向量和切平面方程：

 (1) $x^2+y^2+z^2=4,\boldsymbol{p}_0=(1,1,\sqrt{2})$;

 (2) $z=\arctan\frac{y}{x},\boldsymbol{p}_0=\left(1,1,\frac{\pi}{4}\right)$;

 (3) $3x^2+2y^2-2z-1=0,\boldsymbol{p}_0=(1,1,2)$;

 (4) $z=y+\log\left(\frac{x}{z}\right),\boldsymbol{p}_0=(1,1,1)$.

2. 求出椭球面$x^2+2y^2+3z^2=21$上所有平行于平面$x+4y+6z=0$的切平面．

3. 证明：曲面$z=xe^{x/y}$上所有切平面都通过原点．

4. 定出正数 λ，使曲面 $xyz=\lambda$ 与椭球面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

在某一点相切，即有共同的切平面.

5. 两相交曲面在交点处的法向量所夹的角称为这两曲面在这一点的**夹角**. 求圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ 与曲面 $bz=xy$ 的夹角.

6. 求椭球面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

上点的法向量与 x 轴和 z 轴夹成等角的点的全体.

7. 求曲面 $x^2+y^2+z^2=x$ 的切平面，使其垂直于平面 $x-y-z=2$ 和 $x-y-\frac{z}{2}=2$.

8. 证明：曲面$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}\,(a>0)$的切平面在各坐标轴上割下的诸线段之和为常数.

9. 证明：曲面 $F(x-az,y-bz)=0$ 的所有切平面与某一直线平行，其中 a，b 为常数.

10. 证明：曲面 $F\left(\frac{x-a}{z-c},\frac{y-b}{z-c}\right)=0$ 的切平面通过一个固定点，其中 a，b，c 为常数.

11. 证明：曲面 $ax+by+cz=\Phi(x^2+y^2+z^2)$ 在点 $\boldsymbol{p}_0=(x_0,y_0,z_0)$ 处的法向量与向量 (x_0,y_0,z_0) 和 (a,b,c) 共面.

12. 求两曲面

$$F(x,y,z)=0,\quad G(x,y,z)=0$$

的交线在 xy 平面上的投影曲线的切线方程.

13. 由方程组

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=9,\\ x^2-y^2=3\end{cases}$$

定义一条球面曲线，求这曲线在点 $(2,1,2)$ 处的曲率.

§ 15.2 曲面的参数方程

简单地说，曲面就是双参数的向量值函数. 设 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)\in\mathbf{R}^3$，其中参数 $(u,v)\in\Delta$，这里 Δ 是参数 uv 平面上的一个区域. 记 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$，我们称

$$\Sigma: \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u, v),\ (u, v) \in \Delta \tag{1}$$

是一张参数曲面，把(1)用分量表示出来，就是

$$\begin{cases} x=x(u,v), \\ y=y(u,v), \quad (u,v)\in\Delta. \\ z=z(u,v), \end{cases} \tag{2}$$

通常，我们称(1)是曲面 Σ 的向量方程，而(2)是曲面 Σ 的参数方程．显然，方程(1)和(2)之间的转换是直截了当的，所以我们可以认为(1)与(2)是一回事．

例 1 设 $\boldsymbol{p}_0\in\mathbf{R}^3$ 是一个固定的点，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 是自 $\boldsymbol{p}_0$ 出发的两个不平行的向量．这时，由 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 张成的平面可以有向量方程

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{p}_0+u\boldsymbol{a}+v\boldsymbol{b},$$

这时，参数(u,v)在全参数平面上变化． □

例 2 球心在坐标原点、半径为 a 的球面有参数方程

$$\begin{cases} x=a\sin\theta\cos\varphi, \\ y=a\sin\theta\sin\varphi, \\ z=a\cos\theta, \end{cases} \tag{3}$$

其中参数(θ,φ)的变化范围是$\Delta=[0,\pi]\times[0,2\pi]$，见图 15－5． □

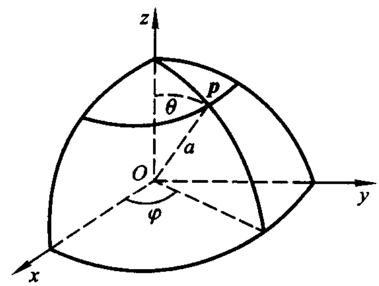


图 15－5

可以把曲面 Σ 的参数方程(2)看成是从参数变化区域 Δ 到 Σ 上的映射

$$\boldsymbol{r}:\Delta\to\boldsymbol{r}(\Delta)=\Sigma,$$

见图 15－6 和图 15－7．也就是说，任意地给定一点$(u_0,v_0)\in\Delta$，代入方程(2)，可算得 Σ 上的一点$\boldsymbol{p}_0=(x_0,y_0,z_0)$，其中

$$x_0=x(u_0,v_0),\ y_0=y(u_0,v_0),\ z_0=z(u_0,v_0).$$

当然，不同的参数对可能对应着 Σ 上的同一个点，这时曲面 Σ 出现自交的现象．

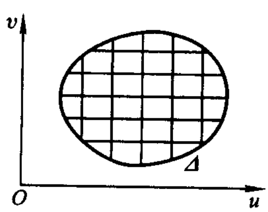


图 15－6

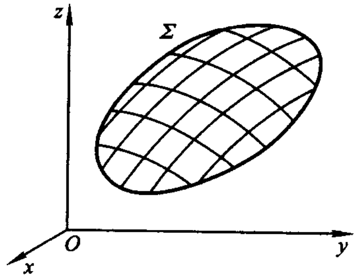


图 15－7

现在，令 $v=v_0$，在参数区域上，这是一段平行于 u 轴的直线. 这时，将 $v=v_0$ 代入参数方程，得出

$$x=x(u,v_0),y=y(u,v_0),z=z(u,v_0)$$

是单参数 u 的方程，对应着 Σ 上的一段曲线，这类曲线被称为曲面 Σ 上的 u 曲线(因为只有参数 u 在变化)，不同的 v_0 就对应着不同的 u 曲线，所有的 u 曲线族就覆盖住了曲面 Σ. 类似地，若令 $u=u_0$，那么曲面 Σ 上的曲线

$$x=x(u_0,v),y=y(u_0,v),z=z(u_0,v)$$

称为 Σ 上的 v 曲线(因为只有参数 v 在变化)，不同的 u_0 对应着不同的 v 曲线，v 曲线族也覆盖住了整个曲面 Σ. 一般地说，曲面 Σ 上的一点，只有一条 u 曲线和一条 v 曲线通过. 例如说，过曲面 Σ 上的点 $\boldsymbol{r}(u_0,v_0)$ 只有 u 曲线 $v=v_0$ 和 v 曲线 $u=u_0$ 通过. 我们说，(u_0,v_0) 是曲面 Σ 上的点 $\boldsymbol{r}(u_0,v_0)$ 的**曲线坐标**，以后，我们干脆称 $(u_0,v_0)\in\Delta$ 是曲面上的点.

让我们来看例 2，这时球面上的 θ 曲线的方程是 $\varphi=$ 常数，它们是球面上的**经线**，而球面上的 φ 曲线的方程是 $\theta=$ 常数，它们是球面上的**纬线**，当常数属于 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，是北纬线，当常数属于 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 时，是南纬线. 很明显，除了南极和北极两点之外，球面上的其他点只有唯一的一条经线和唯一的一条纬线通过.

偏导向量

$$\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u}(u,v_0)=\left(\frac{\partial x}{\partial u}(u,v_0),\frac{\partial y}{\partial u}(u,v_0),\frac{\partial z}{\partial u}(u,v_0)\right)\tag{4}$$

是曲面 Σ 的 u 曲线 $v=v_0$ 的切向量，类似地

$$\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v}(u_0,v)=\left(\frac{\partial x}{\partial v}(u_0,v),\frac{\partial y}{\partial v}(u_0,v),\frac{\partial z}{\partial v}(u_0,v)\right)\tag{5}$$

是曲面 Σ 的 v 曲线 $u=u_0$ 的切向量.

特别地，偏导向量

$$\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u}(u_0,v_0),\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v}(u_0,v_0)\tag{6}$$

分别是曲面 Σ 上的点 (u_0,v_0) 处的 u 曲线的切向量和 v 曲线的切向量. 为了进一步认识这两个向量的几何意义，我们继续开展下面的讨论.

设 $u=u(t),v=v(t)$ 是 Δ 中的一段曲线，并设 $u_0=u(t_0),v_0=v(t_0)$. 这一段曲线在映射 $\boldsymbol{r}$ 之下，变成曲面 Σ 上的一条曲线，它经过 Σ 上的点 $\boldsymbol{p}_0=\boldsymbol{r}(u_0,v_0)$. 所以，我们可以直接称 $u=u(t),v=v(t)$ 是 Σ 上过 $\boldsymbol{p}_0$ 这一点的曲线，它的向量方程是

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u(t),v(t)),$$

对 t 求导，由链式法则，可得

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}u'(t)+\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}v'(t),$$

将 $t=t_0$ 代入上式，我们有

$$\left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0}=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}(u_0,v_0)u'(t_0)+\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}(u_0,v_0)v'(t_0),$$

此式表明：曲面 Σ 上过点 $\boldsymbol{p}_0$ 的任何一条曲线，它在 $\boldsymbol{p}_0$ 的切向量，都是(6)式中的两个向量的线性组合．也就是说，曲面 Σ 上过点 $\boldsymbol{p}_0$ 的任何一条曲线在点 $\boldsymbol{p}_0$ 处的切线在同一平面上，这就是(6)中那两个向量张成的平面，当然要设这两个向量不共线．我们把这个平面定义为 Σ 在 $\boldsymbol{p}_0$ 的**切平面**，而把向量

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}(u_0,v_0)\times\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}(u_0,v_0) \tag{7}$$

当成 Σ 在点 $\boldsymbol{p}_0$ 处的一个**法向量**．

因此，由(7)及(4)，(5)可知，曲面 Σ 在点 (u,v) 处有法向量

$$\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)},\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)},\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right). \tag{8}$$

由(8)式表述的法向量，通常不是单位向量．现在，我们来计算它的模．由于

$$\|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v\|^2=\|\boldsymbol{r}_u\|^2\|\boldsymbol{r}_v\|^2-(\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_v)^2,$$

若我们置

$$\begin{cases} E=\|\boldsymbol{r}_u\|^2=\left(\dfrac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\dfrac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\dfrac{\partial z}{\partial u}\right)^2,\\ F=\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_v=\dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial x}{\partial v}+\dfrac{\partial y}{\partial u}\dfrac{\partial y}{\partial v}+\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial z}{\partial v},\\ G=\|\boldsymbol{r}_v\|^2=\left(\dfrac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\dfrac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\dfrac{\partial z}{\partial v}\right)^2,\end{cases} \tag{9}$$

E，F 和 G 称为曲面 Σ 的**第一基本量**．因此

$$\|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v\|=\sqrt{EG-F^2}, \tag{10}$$

从而

$$\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)},\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)},\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right) \tag{11}$$

是曲面 Σ 的单位法向量，以 $\boldsymbol{n}$ 来记．很自然，若在(11)的前面乘以 -1，得到的也是一个单位法向量，只是其指向与(11)相反．我们令

$$\boldsymbol{n}=\pm\frac{\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v}{\|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v\|}, \tag{12}$$

对本章的讨论来说，在(12)的右边取 $+$ 还是取 $-$，结果不会两样．但是在本书的第 18 章，当我们要对曲面 Σ “定向”时，如何选择(12)右边的符号，就有

讲究了，到时候再作详细的叙述.

要想利用微分和积分作为工具来研究曲面,那就应当要求曲面的方程$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$中的向量值函数$\boldsymbol{r}(u,v)$有所需要的高阶的连续偏导函数．设$(u_0,v_0)\in\Delta$,若

$$\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v\Big|_{(u,v)=(u_0,v_0)}\neq\boldsymbol{0},$$

则称$\boldsymbol{r}(u_0,v_0)$为曲面 Σ 上的**正则点**，否则，称为**奇点**．当 Σ 上的所有点都是正则点时，称 Σ 为**正则曲面**．今后，凡是讲到曲面，都是指正则曲面．我们附加“正则”这一条件的原因，在于保证曲面处处存在着切平面和法向量.

很明显，曲面 Σ 在一点处的切平面和法向量，照理说应当是由曲面的内在几何所确定的，不应当依赖于参数方程的选择，但是，法向量的方向 $\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v$ 又是由曲面的参数方程计算出来的，怎么来说明它实际上与参数的选择无关呢?

设参数(u,v)到新的参数(s,t)之间存在着双方单值的、一阶连续可导的对应关系

$$\begin{cases}u=u(s,t),\\ v=v(s,t),\end{cases}\quad (s,t)\in\tilde{\Delta}. \tag{13}$$

这时，曲面 Σ 有了新的参数方程

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u(s,t),v(s,t)).$$

经直接的计算可知

$$\begin{aligned}\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial s}\times\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial t}&=\left(\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial s}+\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial s}\right)\times\left(\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}\right)\\&=\left(\frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial v}{\partial t}-\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial s}\right)\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v},\end{aligned}$$

也就是

$$\boldsymbol{r}_s\times\boldsymbol{r}_t=\frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)}\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v, \tag{14}$$

由(14)可见，只要映射(13)的 Jacobian 行列式

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)}\neq 0$$

在 Δ 处处成立，那么曲面 Σ 的法向量的方向是不会改变的，至于其指向是否改变，全由

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)}>0 \quad 或 \quad \frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)}<0$$

来决定.

例 3 求例 2 中的球面的法向量.

解 我们有

$$\boldsymbol{r}_\theta = a(\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi, -\sin\theta),$$
$$\boldsymbol{r}_\varphi = a(-\sin\theta\sin\varphi, \sin\theta\cos\varphi, 0),$$

所以

$$E = a^2,\quad F = 0,\quad G = a^2\sin^2\theta,$$

得出$\sqrt{EG-F^2} = a^2\sin\theta$，并且

$$\boldsymbol{r}_\theta \times \boldsymbol{r}_\varphi = a^2\sin\theta(\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta),$$

因此，球面的单位法向量是

$$(\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta).$$

对照球面的参数方程(3)，前一表达式正是

$$\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}, \frac{z}{a}\right) = \frac{1}{a}(x, y, z),$$

这是球面上点的径向量除以球的半径，正好是球的单位外法向量． □

有了曲面 Σ 的第一基本量 E，F 和 G，就可以计算曲面上的曲线的弧长．设$u = u(t), v = v(t)$是 Σ 上的一条曲线，这条曲线有向量方程

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u(t), v(t)),$$

因此

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = (\boldsymbol{r}_u u'(t) + \boldsymbol{r}_v v'(t))\mathrm{d}t,$$

弧元的平方是

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\boldsymbol{r}^2 = (Eu'^2(t) + 2Fu'(t)v'(t) + Gv'^2(t))\mathrm{d}t^2,$$

由此得到弧长公式

$$s = \int \sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}\,\mathrm{d}t, \tag{15}$$

这是一个定积分，它的下限和上限应由曲线的起点和终点而定．

看一个例子．

例 4 求证：一切由球面上两点所决定的球面曲线中，只有这两点所定的较短的大圆弧才有最小的弧长．

证明 设在例 2 的球面 Σ 上，$\boldsymbol{p}$ 和 $\boldsymbol{q}$ 是其上的两点．不失一般性，可设 $\boldsymbol{p}$ 与 $\boldsymbol{q}$ 在 Σ 的同一条经线上．设这两点的参数分别是(θ_0, φ_0)和(θ_1, φ_0)，其中 $\theta_1 > \theta_0$．这两点所决定的球面曲线记为 Γ，又设 Γ 的方程是

$$\theta = \theta(t), \varphi = \varphi(t), t_0 \leqslant t \leqslant t_1,$$

由公式(15)，Γ 的弧长是

$$s(\Gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{a^2\theta'^2 + a^2\sin^2\theta \cdot \varphi'^2}\,\mathrm{d}t$$
$$\geqslant a\int_{t_0}^{t_1} \theta'(t)\mathrm{d}t = a(\theta(t_1) - \theta(t_0)).$$

式中等号当且只当 $\varphi'=0$ 时，亦即 φ 为常数 φ_0 时才能成立．这时的曲线 Γ 正是由 $\boldsymbol{p}$ 与 $\boldsymbol{q}$ 两点所决定的大圆弧，而

$$a(\theta(t_1)-\theta(t_0))=a(\theta_1-\theta_0)$$

正好是这一段大圆弧的弧长． □

练习题 15.2

1．求出以下曲面的 E，F 和 G：

(1) 椭球面

$$\boldsymbol{r}(u,v)=(a\sin u\cos v, b\sin u\sin v, c\cos u);$$

(2) 单叶双曲面

$$\boldsymbol{r}(u,v)=(a\operatorname{ch} u\cos v, b\operatorname{ch} u\sin v, c\operatorname{sh} u);$$

(3) 椭圆抛物面

$$\boldsymbol{r}(u,v)=\left(u,v,\frac{1}{2}\left(\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}\right)\right);$$

(4) 双曲抛物面

$$\boldsymbol{r}(u,v)=(a(u+v),b(u-v),2uv);$$

(5) 劈锥面

$$\boldsymbol{r}(u,v)=(u\cos v,u\sin v,\varphi(v));$$

(6) 一般螺面

$$\boldsymbol{r}(u,v)=(u\cos v,u\sin v,\varphi(u)+av).$$

2．设 E，F 和 G 为曲面 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$ 的第一基本量，称

$$I=E\mathrm{d}u^2+2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v+G\mathrm{d}v^2$$

为该曲面的**第一基本齐式**．求证：$I=\mathrm{d}\boldsymbol{r}^2$．

3．已知曲面的第一基本齐式为

$$I=\mathrm{d}u^2+(u^2+a^2)\mathrm{d}v^2,$$

求曲面上的曲线 $u=v$ 从 v_1 到 $v_2(>v_1)$ 这一段的弧长．

§ 15.3 凸 曲 面

本节讨论的对象是由显式表达的曲面．

我们还记得，在学习过一元函数的微分学之后，紧接着研究了函数的单调

性和凸性．对于多元函数，在学过微分学之后，也应当转来考虑类似的问题．由于二元函数的凸性在理论和应用上都有重要的意义，我们在此作初步的讨论．

在 § 13.7 中我们已经给出了 $\mathbf{R}^n$ 的凸域上凸函数的概念，并且证明了（§ 13.7 例 10）$\mathbf{R}^n$ 凸域上的凸函数必是连续函数．现设 f 是 $\mathbf{R}^2$ 的凸域 D 上的凸函数，那么 $z=f(x,y)$ 是一张连续的凸曲面，由凸函数的定义可知，显式曲面 $z=f(x,y)$ 在 D 上是凸的，必须而且只需任何平行于 z 轴的平面同这曲面的交线是凸曲线．有了这种认识，就可以把对二元凸函数的研究，转化成对一元凸函数的研究．

在 D 内任取两点 $\boldsymbol{p}_1$，$\boldsymbol{p}_2$，设 $\boldsymbol{p}_i=(x_i,y_i),i=1,2$．连线 $\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_2$ 上的任一点 $\boldsymbol{p}$，都可以表示为 $\boldsymbol{p}=(1-t)\boldsymbol{p}_1+t\boldsymbol{p}_2$，这里 $t\in[0,1]$．把函数 f 局限在这线段上，我们得到单变量 t 的函数

$$\varphi(t)=f((1-t)x_1+tx_2,(1-t)y_1+ty_2),$$

这里 $t\in[0,1]$．将 φ 对 t 求一阶和二阶导数，得到

$$\varphi'(t)=(x_2-x_1)\frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{p})+(y_2-y_1)\frac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{p}),$$

$$\varphi''(t)=(x_2-x_1,y_2-y_1)\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\boldsymbol{p}) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\boldsymbol{p})\\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(\boldsymbol{p}) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\boldsymbol{p})\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_2-x_1\\ y_2-y_1\end{pmatrix}. \tag{1}$$

置

$$Hf(\boldsymbol{p})=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\boldsymbol{p}) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\boldsymbol{p})\\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(\boldsymbol{p}) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\boldsymbol{p})\end{pmatrix}, \tag{2}$$

按照 § 14.10 中的定义，它正是函数 f 在点 $\boldsymbol{p}$ 处的 **Hessian**．如果 f 二阶连续可导，那么 f 的 **Hessian** 就是一个二阶对称方阵，很显然 $Hf(\boldsymbol{p})$ 是随着点 $\boldsymbol{p}\in D$ 的变化而变化的．

函数 f 在 D 上是凸的，必须而且只需对任何 $\boldsymbol{p}_1$，$\boldsymbol{p}_2\in D$，一元函数 $\varphi''\geqslant 0$ 在 $[0,1]$ 上成立．为了进一步讨论这一问题，我们需要如下的引理．

引理 15.1 对称方阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix},a_{12}=a_{21}$$

是正定的，必须而且只需 $a_{11}\geqslant 0$，$a_{22}\geqslant 0$ 并且

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}\geqslant 0\ .$$

引理的证明留作习题，读者可仿照定理 14.21 的证明来完成.

令 $\xi = x_2 - x_1$，$\eta = y_2 - y_1$，因此(1)可写成

$$\varphi''(t) = (\xi, \eta) Hf(\boldsymbol{p}) \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}. \tag{3}$$

如果 $\varphi'' \geqslant 0$ 在$[0,1]$上成立，那么必须且只需二次型(3)是正定的. 根据用二阶导数非负来刻画凸函数的定理(见上册定理 3.21)，利用引理 15.1，我们立刻得到

定理 15.1　设凸集 $D \subset \mathbf{R}^2$，函数 f：$D \to \mathbf{R}$ 二阶连续可导. 于是，f 是 D 上的凸函数，必须而且只需对于一切$\boldsymbol{p} \in D$，$Hf(\boldsymbol{p})$是正定方阵；也就是说

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\boldsymbol{p}) \geqslant 0, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\boldsymbol{p}) \geqslant 0,$$

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\boldsymbol{p}) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\boldsymbol{p}) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\boldsymbol{p}) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\boldsymbol{p}) \end{vmatrix} \geqslant 0$$

对一切 $\boldsymbol{p} \in D$ 成立.

例 1　设$D = \{(x, y): x^2 + y^2 < a^2\}$，求证：下半球面

$$z = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, (x, y) \in D$$

是凸曲面.

证明　由于$\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{x}{z}$，所以

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{z - x(-x/z)}{z^2} = -\frac{x^2 + z^2}{z^3} > 0,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -\frac{xy}{z^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{y^2 + z^2}{z^3} > 0,$$

由此可得

$$\begin{aligned} \det Hz &= \frac{1}{z^6} \begin{vmatrix} x^2 + z^2 & xy \\ xy & y^2 + z^2 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{z^6}(x^2 z^2 + y^2 z^2 + z^4) = \frac{1}{z^4}(x^2 + y^2 + z^2) \\ &= \frac{a^2}{z^4} > 0, \end{aligned}$$

依定理 15.1 知，下半球面是凸曲面.　□

例 2　讨论**双线性曲面**

$$z=f(x,y)=\frac{1}{(\beta_2-\beta_1)(\alpha_2-\alpha_1)}\{a_{11}(\alpha_2-x)(\beta_2-y)+a_{12}(\alpha_2-x)(y-\beta_1)$$
$$+a_{21}(x-\alpha_1)(\beta_2-y)+a_{22}(x-\alpha_1)(y-\beta_1)\} \tag{4}$$

的凸性，其中$(x,y)\in[\alpha_1,\alpha_2]\times[\beta_1,\beta_2]$，$\alpha_2>\alpha_1$，$\beta_2>\beta_1$.

解 这张曲面其所以称为双线性曲面，是因为当把y(或x)看做固定时，它是x(或y)的线性函数．因而有$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=0$，$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$．直接计算可得

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{1}{(\beta_2-\beta_1)(\alpha_2-\alpha_1)}(a_{11}-a_{12}-a_{21}+a_{22}).$$

由定理 15.1 可知，该曲面为凸曲面的充分必要条件是

$$a_{11}+a_{22}=a_{12}+a_{21}. \tag{5}$$

我们来看一下条件(5)的几何意义．首先，

$$f(\alpha_1,\beta_1)=a_{11},\ f(\alpha_1,\beta_2)=a_{12},$$
$$f(\alpha_2,\beta_1)=a_{21},\ f(\alpha_2,\beta_2)=a_{22}.$$

我们称$(\alpha_i,\beta_j,a_{ij})(i,j=1,2)$为曲面(4)的四个角点，一般来说，这四个角点是不共面的，由于

$$\begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1 & a_{11} & 1\\ \alpha_1 & \beta_2 & a_{12} & 1\\ \alpha_2 & \beta_1 & a_{21} & 1\\ \alpha_2 & \beta_2 & a_{22} & 1\end{vmatrix}=(\alpha_2-\alpha_1)(\beta_2-\beta_1)(a_{22}-a_{21}-a_{12}+a_{11}),$$

故(5)是四点

$$(\alpha_1,\beta_1,a_{11}),(\alpha_1,\beta_2,a_{12}),(\alpha_2,\beta_1,a_{21}),(\alpha_2,\beta_2,a_{22})$$

共面的充要条件．

把(4)的右端展开便可看出，当(5)成立时，(4)就退化为平面．

事实上，双线性曲面或者是双曲抛物面，或者是平面，依赖于$a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}$是否为零．只有当它退化成平面时，它才是凸曲面． □

练习题 15.3

1．证明引理 15.1.

2．讨论曲面$z=ax^2+2bxy+cy^2$，其中a，b，c为常数．求此曲面在$\mathbf{R}^2$上为凸曲面的必要充分条件．

3．证明：锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$在$\mathbf{R}^2$上是凸曲面．

4. 设二阶连续可导的一元函数f在$[0,+\infty)$上是递增的，又是凸的，求证：旋转曲面$z=f(\sqrt{x^2+y^2})$在$\mathbf{R}^2$上是凸曲面.

5. 在$D=\{(x,y):x\geqslant 0,y\geqslant 0,x+y\leqslant 1\}$上定义曲面

$$z=Ax^2+By^2+C(1-x-y)^2+2ay(1-x-y)+2bx(1-x-y)+2cxy,$$

其中A，B，C和a，b，c均为常数. 设

$$A+a\geqslant b+c,\quad B+b\geqslant c+a,\quad C+c\geqslant a+b,$$

求证：该曲面在D上是凸曲面.

6. 设$D\subset\mathbf{R}^2$是一个凸区域，函数f：$D\to\mathbf{R}$二阶连续可导. 求证：f在D上为凸函数的必要充分条件是，曲面$z=f(x,y)$上的每一张切平面都不在曲面的上方.

§15.4　Bernstein – Bézier 曲面

本节的目的是，通过一个实用的例子来说明§15.3中凸函数理论的应用.

在本书上册第5章和第8章里，讨论过多项式的Bernstein表示和Bézier曲线，指出过它们的许多基本性质. 我们说过，Bézier曲线是计算机辅助曲线设计的一种很方便的工具.

在实际应用中，曲面设计更为重要. 在飞机、汽车和舰船工业中，早在一百年以前就提出了用数学来定义外形曲面的迫切要求. 由于我们的课程的性质，不能把事情弄得过分复杂，所以在这一节中，只涉及由显式表达的曲面.

在平面图形中，有两类最基本、最简单的图形，那就是矩形和三角形. 平面上很多图形，就可以划分成许多矩形或者许多三角形来逼近. 因此在这一节里，我们只能着重讨论定义在矩形域上的Bernstein – Bézier曲面片(简称B – B曲面片).

不失一般性，我们考虑正方形$D=[0,1]^2$. 设$n\in\mathbf{N}_+$，把横轴上的区间$[0,1]$分成n等份，过这$n+1$个分点作平行于纵轴的直线，再对纵轴上的区间$[0,1]$也如此分割，过这$n+1$个分点作平行于横轴的直线. 这两族平行直线相交于$(n+1)^2$个点，它们是

$$\left(\frac{i}{n},\frac{j}{n}\right),\ i,j=0,1,\cdots,n\ .$$

在这些点上结合一个实数$a_{ij}(i,j=0,1,\cdots,n)$，讨论D上的曲面

$$z=f(x,y)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}a_{ij}B_i^n(x)B_j^n(y)\ ,\qquad (1)$$

这里 $B_i^n(x)(i=0,1,\cdots,n)$ 是 n 次 Bernstein 基函数

$$B_i^n(x)=\binom{n}{i}x^i(1-x)^{n-i},i=0,1,\cdots,n.$$

曲面(1)称为定义在正方形 D 上的 B – B 曲面.

显然可见，(1)式的右边是 x 和 y 两个变元的多项式，其总次数不会超过 $2n$. 调整 $(n+1)^2$ 个系数 $a_{ij}(i,j=0,1,\cdots,n)$ 的一部分或全部，可以改变曲面(1)的形状，这就是曲面设计的基本意义. 很明显，当 $n=1$ 时，曲面(1)就是前节例 2 中提到的 $\alpha_1=\beta_1=0$，$\alpha_2=\beta_2=1$ 的双线性曲面.

空间点组

$$\left(\frac{i}{n},\frac{j}{n},a_{ij}\right),i,j=0,1,\cdots,n \tag{2}$$

称为曲面(1)的**控制点**.

考虑相邻的 4 个控制点

$$\left(\frac{i-1}{n},\frac{j-1}{n},a_{i-1,j-1}\right),\left(\frac{i}{n},\frac{j-1}{n},a_{i,j-1}\right),$$

$$\left(\frac{i-1}{n},\frac{j}{n},a_{i-1,j}\right),\qquad\left(\frac{i}{n},\frac{j}{n},a_{i,j}\right),$$

它们一般是不共面的，由这 4 点可以像前节例 2 那样决定一个双线性曲面：

$$\begin{aligned}z=S_{ij}(x,y)=n^2\Big\{&a_{i-1,j-1}\left(\frac{i}{n}-x\right)\left(\frac{j}{n}-y\right)+a_{i-1,j}\left(\frac{i}{n}-x\right)\left(y-\frac{j-1}{n}\right)\\&+a_{i,j-1}\left(x-\frac{i-1}{n}\right)\left(\frac{j}{n}-y\right)+a_{i,j}\left(x-\frac{i-1}{n}\right)\left(y-\frac{j-1}{n}\right)\Big\},\\&i,j=1,\cdots,n.\end{aligned}$$

这样 n^2 个双线性曲面片的全体，组成定义在 D 上的分片的、整体连续的曲面，记这张曲面为 S，称 S 为曲面(1)的**控制网**或 **Bézier 网**. 它是 Bézier 曲线的 Bézier 多边形(亦称控制多边形)的对应物.

显然，研究控制网和它的 Bézier 曲面的几何关联是十分重要的，这将使得我们明了控制点的变化是怎样影响着 B – B 曲面形状的变化的，从而为曲面设计提供依据.

由(1)立刻可知

$$f(0,0)=a_{00},f(1,0)=a_{n0},$$

$$f(0,1)=a_{0n},f(1,1)=a_{nn},$$

这表明：在曲面(1)的 4 个角点上，它是插值于它的控制网 S 的 4 个角点的. 但是，其他的控制点不见得在曲面(1)上.

其次，让我们看看曲面(1)的边界曲线. 命 $y=0$ 代入(1)，得到

$$z=f(x,0)=\sum_{i=0}^{n}a_{i0}B_i^n(x),0\leqslant x\leqslant 1,$$

这是横向上的一条边界曲线；如果令 $x=1$ 代入(1)，则有

$$z = f(1,y) = \sum_{j=0}^{n} a_{nj}B_j^n(y), 0 \leqslant y \leqslant 1,$$

这是纵向上的一条边界曲线．它们都是 x 的或 y 的 Bernstein 多项式，也可以认为是显式表达的 Bézier 曲线．让我们看看 4 个角点中的一个，不失一般性，来看角点$(0,0,a_{00})$．过这个角点有两条边界曲线经过，它们都是 Bézier 曲线，因此它们的控制多边形的第一条边分别与边界曲线在这个角点上相切，因此，这两条边就张成了曲面(1)在这个角点上的切平面．对于曲面(1)的其他 3 个角点，也成立着同样的结论．

与曲线的情形一样，B－B 曲面(1)继承了其控制网的几何性质．例如说，如果控制网是非负的，很明显，由这个网所确定的曲面(1)也是非负的．我们即将证明，如果控制网 S 是凸的，那么由 S 所决定的 B－B 矩形曲面(1)也是凸的．

设 S 是一个凸网，凸网该有什么性质呢？第一，S 是凸的，那么 S 的任何一个部分也必须是凸的．特别地，组成 S 的每一片双线性曲面必须是凸的．由前节的例 2 中的公式(5)，我们必须有

$$a_{i-1,j-1} - a_{i,j-1} - a_{i-1,j} + a_{i,j} = 0 \tag{3}$$

对 i，$j=1$，2，…，n 都成立．

其次，平面$x=\dfrac{i}{n}(i=0,1,\cdots,n)$同 S 的交线(分段线性的连续函数)必须都是凸的，而这必须且只需

$$a_{i,j} - 2a_{i,j+1} + a_{i,j+2} \geqslant 0, \tag{4}$$

这里 $i=0$，1，…，n，而 $j=0$，1，…，$n-2$．类似地，平面$y=\dfrac{j}{n}(j=0,1,\cdots,n)$同 S 的交线(也是连续的分段线性函数)也必须是凸的，这相当于

$$a_{i,j} - 2a_{i+1,j} + a_{i+2,j} \geqslant 0, \tag{5}$$

这里 $i=0$，1，…，$n-2$，而 $j=0$，1，…，n．

这就是说，当 S 是一个凸的控制网时，我们必须有等式组(3)和不等式组(4)与(5)同时成立．

现在，我们把(1)写成

$$f(x,y) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i B_i^n(x),$$

其中

$$\lambda_i = \lambda_i(y) = \sum_{j=0}^{n} a_{ij}B_j^n(y) \quad i = 0,1,\cdots,n.$$

对 x 求偏导数，得

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = n\sum_{i=0}^{n-1}(\lambda_{i+1}-\lambda_i)B_i^{n-1}(x), \tag{6}$$

再求偏导数

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = n(n-1)\sum_{i=0}^{n-2}(\lambda_i - 2\lambda_{i+1} + \lambda_{i+2})B_i^{n-2}(x),$$

如果不等式组(5) 成立,那么

$$\lambda_i - 2\lambda_{i+1} + \lambda_{i+2} = \sum_{j=0}^{n}(a_{ij} - 2a_{i+1,j} + a_{i+2,j})B_j^n(y) \geqslant 0$$

对一切$y\in[0,1]$成立，由此可见

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} \geqslant 0, \quad (x,y)\in D. \tag{7}$$

类似地，如果不等式组(4)成立，可以推知

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} \geqslant 0, (x,y)\in D. \tag{8}$$

计算混合偏导，由(6)得出

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y} = n\sum_{i=0}^{n-1}(\lambda'_{i+1}(y) - \lambda'_i(y))B_i^{n-1}(x),$$

但因

$$\begin{aligned}\lambda'_{i+1}(y) - \lambda'_i(y) &= n\sum_{j=0}^{n-1}(a_{i+1,j+1} - a_{i+1,j})B_j^{n-1}(y)\\ &\quad - n\sum_{j=0}^{n-1}(a_{i,j+1} - a_{i,j})B_j^{n-1}(y)\\ &= n\sum_{j=0}^{n-1}(a_{i+1,j+1} - a_{i+1,j} - a_{i,j+1} + a_{ij})B_j^{n-1}(y),\end{aligned}$$

由此可知，只要等式组(3)成立时，$\lambda'_{i+1}(y) = \lambda'_i(y)$对 $y\in[0,1]$和 $i=0, 1, \cdots, n-1$成立．这时

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y} = 0, \quad (x,y)\in D. \tag{9}$$

有了(7)，(8)和(9)，依定理 15.1，得知$z=f(x,y)$在$D=[0,1]^2$上是凸曲面．

把以上的讨论总结为定理，就是

定理 15.2 如果控制网 S 是凸曲面，那么由 S 所决定的矩形域上的 B – B 曲面片一定也是凸曲面．

三角形元比矩形元更为灵活，由于这一原因，我们也可以定义三角形上的 B – B 多项式．事实上，三角域上的 B – B 曲面片已经成为 CAGD 中的重要工具，相应的数学理论已经形成了一个可观的数学工业．对于三角域上的 B – B 曲面片，可以更自然地定义它的控制网，并且也能够证明：“如果控制网是凸

的，那么相应的 B－B 曲面片也是凸的"，这就是三角域上的 B－B 曲面的保形性的一种表现．在我们的教程中，不可能对此进行深入的讨论．

练习题 15.4

1．设$f:[0,1]^2\to\mathbf{R}$．定义

$$B_{m,n}(f;x,y)=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}f\left(\frac{i}{m},\frac{j}{n}\right)B_i^m(x)B_j^n(y),$$

并称之为函数 f 的 **Bernstein 多项式**．求证：

(1) 如果在$[0,1]^2$上 $f\geqslant 0$，那么 $B_{m,n}(f)\geqslant 0$；

(2) 如果在$[0,1]^2$上 f 有界，那么

$$\inf_{(x,y)\in[0,1]^2}f(x,y)\leqslant B_{m,n}(f;x,y)\leqslant\sup_{(x,y)\in[0,1]^2}f(x,y).$$

2．对于线性函数$f(x,y)=ax+by+c$，求证：

$$B_{m,n}(f)=f,$$

即线性函数是算子 $B_{m,n}$ 的不动点．

3．求证：$B_{m,n}(xy;x,y)=xy$．这就是说，函数 xy 也是算子 $B_{m,n}$ 的不动点．

第16章　多 重 积 分

设 f 是定义在 n 维欧氏空间的有界点集 D 上的函数，我们将要定义 f 在 D 上的积分，并称之为 f 在 D 上的 ***n* 重积分**．n 重积分是本书上册第 7 章中所讨论的单变量函数的 Riemann 积分的推广．为便于学习，我们首先重点介绍**二重积分**，也就是二元函数的积分．将来我们能看到，n 重积分的概念和理论，基本上与重数 n 没有关系，因此，当我们把二重积分的理论牢固地建立起来之后，再过渡到 n 重积分，并不会有本质的困难．在那些产生区别的地方，我们将着重指明．

设有界点集 $D\subset\mathbf{R}^2$，函数 f: $D\to\mathbf{R}$．如同一元函数的积分那样，我们可以用很直观的方式引入 f 在 D 上的积分这一概念．先设在 D 上 $f\geqslant 0$．函数 f 的图像是分布在 D 上的一块曲面(图 16－1)．由 D 和这块曲面夹成的一个柱体可以表示为

$$\{(x,y,z):0\leqslant z\leqslant f(x,y),(x,y)\in D\},$$

我们要来计算(严格地说是要来定义)这个柱体的体积．为此，将 D 划分成若干小块，记为 D_1，D_2，…，D_k(图 16－2)．在每一小块 D_i 上，任取一点 ξ_i，先计算函数值 $f(\xi_i)$，并且作和

$$\sum_{i=1}^{k}f(\xi_i)\sigma(D_i),$$

这里 $\sigma(D_i)$ 是小块 D_i 的面积．以上的和式表示柱体体积的一个近似值．要想得到柱体体积的合理定义，就应当把分割无限地加细．这是一个极限过程，就是说，我们定义柱体的体积为

$$V=\lim\sum_{i=1}^{k}f(\xi_i)\sigma(D_i),$$

在这里，极限是对 $\max\{\mathrm{diam}(D_1),\cdots,\mathrm{diam}(D_k)\}\to 0$ 来取的，并且要求 V 的存在性和数值不依赖 ξ_i 在 D_i 中的选择，$i=1,2,\cdots,k$．在这种情况下，记

$$V=\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

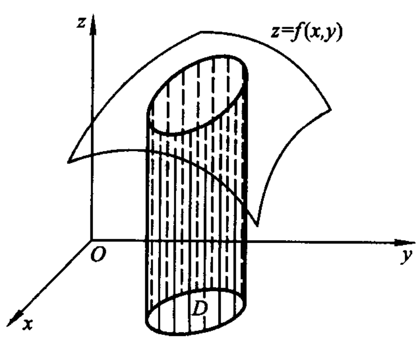


图　16－1

也可以写成

$$V = \int_D f(p)\,\mathrm{d}\sigma,$$

这里的 $\mathrm{d}\sigma$ 表示**面积元素**.

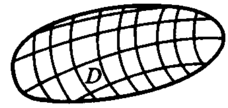


图　16-2

回忆在一元函数积分的定义中，我们把区间$[a,b]$进行分割，即把它分成若干个子区间，计算这些区间的长度没有任何困难. 但是在 $\mathbf{R}^2$ 中，一个点集 D 即使有界，也可能是相当复杂的集合. 如何将 D 进行分割？在分割之后，那些小块 D_i 的"面积"$\sigma(D_i)$又如何确定？这些都是在建立二重积分的时候遇到的最大障碍. 为了克服这些障碍，采取分两步走的方法. 首先讨论矩形上的二重积分，然后再讨论 $\mathbf{R}^2$ 中任一有界点集上的二重积分.

设 $I=[a,b]\times[c,d]$，我们称 I 是 $\mathbf{R}^2$ 的一个闭矩形，它的两对对边分别平行于横轴和纵轴. 我们定义 I 的面积

$$\sigma(I)=(b-a)(d-c),$$

这一定义显然是合理的. 本章中提到的矩形都是指这种类型的矩形.

§16.1　矩形区域上的积分

设 I 是 $\mathbf{R}^2$ 中的闭矩形，$I=[a,b]\times[c,d]$. 作$[a,b]$的分割

$$\pi_x:\ a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b;$$

又作$[c,d]$的分割

$$\pi_y:\ c=y_0<y_1<\cdots<y_m=d.$$

两族平行直线：$x=x_i\ (i=0,1,\cdots,n)$与 $y=y_j\ (j=0,1,\cdots,m)$，把 I 分割成 $k=n\times m$ 个子矩形

$$[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j],\ i=1,2,\cdots,n \text{ 及 } j=1,2,\cdots,m.$$

这 k 个子矩形的全体组成 I 的一个分割 $\pi=\pi_x\times\pi_y$. 用一定的次序重排这 k 个子矩形，将它们编号为 $I_1,I_2,\cdots,I_k$. 在每一个 I_i 中任取一点 $\xi_i\ (i=1,2,\cdots,k)$，作**积分和**(也称 Riemann 和)

$$\sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\sigma(I_i). \tag{1}$$

记

$$\|\pi\| = \max\{\mathrm{diam}(I_1),\cdots,\mathrm{diam}(I_k)\},$$

这里 $\mathrm{diam}(I_i)$是矩形 I_i 的对角线的长度，我们称 $\|\pi\|$ 为分割 π 的**宽度**.

置 $\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_k)$，称 ξ 为积分和(1)的**值点向量**，称 $\xi_1,\cdots,\xi_k$ 为**值点**.

定义 16.1 如果存在数 A 使得对任意给定的 $\varepsilon>0$，有 $\delta>0$，凡是 $\|\pi\|<\delta$ 时，不论值点 ξ_i 在子矩形 I_i 中如何选择，都有

$$\left|\sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\sigma(I_i)-A\right|<\varepsilon,$$

便称函数 f 在矩形 I 上**可积**，并将 A 写作

$$\iint_I f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad \text{或者} \qquad \int_I f\mathrm{d}\sigma,$$

称之为 f 在矩形 I 上的**二重积分**，或简称 f 在 I 上的**积分**. 这里 f 被称为**被积函数**，I 称为**积分区域**.

在这一定义中所表述的极限过程常常记为

$$\lim_{\|\pi\|\to 0}\sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\sigma(I_i)=A,$$

从而可以省去许多文字.

例 1 设函数 f 在 I 上取常数值 c，那么

$$\int_I f\,\mathrm{d}\sigma = c\sigma(I).$$

从以上的讨论来看，二重积分的定义与单变量函数在闭区间上的积分的定义实质上没有任何差别. 因此单变量函数在区间上积分的许多性质可以无需另作证明而直接对二重积分建立起来.

定理 16.1 如果 f 在 I 上可积，那么 f 必在 I 上有界.

定理 16.2 如果 f 和 g 在 I 上可积，则

1° c 为任何常数，那么 cf 在 I 上也可积，并且

$$\int_I (cf)\,\mathrm{d}\sigma = c\int_I f\mathrm{d}\sigma,$$

这表明：常数因子可以直接提到积分号外来；

2° $f\pm g$ 也在 I 上可积，并且

$$\int_I (f\pm g)\mathrm{d}\sigma=\int_I f\mathrm{d}\sigma\pm\int_I g\mathrm{d}\sigma.$$

定理 16.3 如果 f 和 g 在 I 上可积，

1° 若 $f\geqslant 0$，则

$$\int_I f\mathrm{d}\sigma\geqslant 0;$$

2° 若 $f\geqslant g$，那么

$$\int_I f\mathrm{d}\sigma\geqslant\int_I g\mathrm{d}\sigma.$$

证明 结论 1°是显然的，只证明 2°. 利用 1°可得

$$\int_I f\mathrm{d}\sigma - \int_I g\mathrm{d}\sigma = \int_I (f-g)\,\mathrm{d}\sigma \geqslant 0. \quad \square$$

我们十分关心的是，矩形 I 上怎样的有界函数一定在 I 上可积？这就要进行可积性的研究.

在给定函数 f 之后，积分和(1)可以写为

$$S(\pi,\xi) = \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\,\sigma(I_i),$$

这说明一个 Riemann 和既依赖于 I 的分割 π，还依赖于值点 $\xi_i \in I_i$ ($i=1,2,\cdots,k$)的选取. 若置

$$m_i = \inf f(I_i),\quad M_i = \sup f(I_i), i=1,2,\cdots,k,$$

定义

$$\underline{S}(\pi) = \sum_{i=1}^{k} m_i\sigma(I_i),$$

$$\overline{S}(\pi) = \sum_{i=1}^{k} M_i\sigma(I_i),$$

分别称它们为函数 f 关于分割 π 的**下和**与**上和**，它们只与分割 π 有关. 显然可见：对同一分割 π 而言，任何积分和都介于下和与上和之间，即

$$\underline{S}(\pi) \leqslant S(\pi,\xi) \leqslant \overline{S}(\pi).$$

设 $\pi = \pi_x \times \pi_y$ 与 $\pi' = \pi'_x \times \pi'_y$ 是 I 的两个分割，如果 $\pi_x \leqslant \pi'_x$ 同时 $\pi_y \leqslant \pi'_y$，这里涉及的是数轴上两个分割粗与细的比较(见上册 §7.5)，那么我们称分割 π 比 π' 粗，或者说分割 π' 比 π 细，记为 $\pi \leqslant \pi'$. 类似于第 7 章的定理 7.13，我们有

定理 16.4 设 π 和 π' 是矩形 I 的两个分割并且 $\pi \leqslant \pi'$，那么

$$\underline{S}(\pi) \leqslant \underline{S}(\pi') \leqslant \overline{S}(\pi') \leqslant \overline{S}(\pi).$$

这就是说，在细分之下，下和不会减少而上和不会增大.

这个定理的证明与定理 7.13 的证明完全相似，故从略.

定理 16.5 设 π_1 和 π_2 是 I 的任何两个分割，那么

$$\underline{S}(\pi_1) \leqslant \overline{S}(\pi_2),$$

也就是说：任意下和决不大于任意上和.

证明 设 $\pi_i = \pi_{ix} \times \pi_{iy}$ ($i=1,2$)，把区间 $[a,b]$ 上的两个分割 π_{1x} 与 π_{2x} 的分点合在一起，组成 $[a,b]$ 的分割 π_x；又把区间 $[c,d]$ 的两个分割 π_{1y} 与 π_{2y} 的分点合在一起，组成 $[c,d]$ 的分割 π_y. 令 $\pi = \pi_x \times \pi_y$，这是矩形 I 上的一个分割，显然 π 比 π_1 和 π_2 都要细，依定理 16.4，有

$$\underline{S}(\pi_1) \leqslant \underline{S}(\pi) \leqslant \overline{S}(\pi) \leqslant \overline{S}(\pi_2). \quad \square$$

为了节省书写，我们把上述由分割 π_1 与 π_2 而得到分割 π 的过程称为

“把 π_1 与 π_2 合在一起而得到分割 π”.

由上述定理可知，下和所成之集是有上界的，令

$$\underline{\int_I} f\mathrm{d}\sigma = \sup_{\pi} \underline{S}(\pi),$$

称这个数为 f 在 I 上的**下积分**. 对称地，上和所成的集是有下界的，令

$$\overline{\int_I} f\mathrm{d}\sigma = \inf_{\pi} \overline{S}(\pi),$$

称这个数为 f 在 I 上的**上积分**. 很明显

$$\underline{S}(\pi) \leqslant \underline{\int_I} f\mathrm{d}\sigma \leqslant \overline{\int_I} f\mathrm{d}\sigma \leqslant \overline{S}(\pi') \tag{2}$$

对矩形 I 的任意两个分割 π 和 π' 成立.

定理 16.6 等式

$$\underline{\int_I} f\mathrm{d}\sigma = \overline{\int_I} f\mathrm{d}\sigma$$

成立的必要充分条件是：对任意给定的 ε，存在 I 的一个分割 π 使得

$$\overline{S}(\pi) - \underline{S}(\pi) < \varepsilon.$$

证明 1° **必要性**

设

$$A = \underline{\int_I} f\mathrm{d}\sigma = \overline{\int_I} f\mathrm{d}\sigma.$$

由下积分的定义，对任给的 $\varepsilon > 0$，存在区间 I 的一个分割 π_1，使得

$$\underline{S}(\pi_1) > A - \frac{\varepsilon}{2};$$

又由上积分的定义，存在区间 I 的一个分割 π_2 使得

$$\overline{S}(\pi_2) < A + \frac{\varepsilon}{2}.$$

把分割 π_1 与 π_2 合在一起得出分割 π，可知

$$A - \frac{\varepsilon}{2} < \underline{S}(\pi_1) \leqslant \underline{S}(\pi) \leqslant \overline{S}(\pi) \leqslant \overline{S}(\pi_2) < A + \frac{\varepsilon}{2},$$

由此推出

$$\overline{S}(\pi) - \underline{S}(\pi) < \left(A + \frac{\varepsilon}{2}\right) - \left(A - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon.$$

2° **充分性**

如果对任意给定的 $\varepsilon > 0$，存在区间 I 的一个分割 π 使得

$$\overline{S}(\pi) - \underline{S}(\pi) < \varepsilon,$$

那么由不等式(2)可知

$$0 \leqslant \overline{\int_I} f\mathrm{d}\sigma - \underline{\int_I} f\mathrm{d}\sigma \leqslant \overline{S}(\pi) - \underline{S}(\pi) < \varepsilon,$$

由于 ε 是任意的正数，故必须有

$$\underline{\int_I} f\mathrm{d}\sigma = \overline{\int_I} f\mathrm{d}\sigma. \quad \square$$

更进一步，我们有

定理 16.7 函数 f 在区间 I 上可积的必要充分条件是

$$\underline{\int_I} f\mathrm{d}\sigma = \overline{\int_I} f\mathrm{d}\sigma, \tag{3}$$

这个共同值就是积分值 $\int_I f\mathrm{d}\sigma$.

证明 1° **必要性**

设 f 在 I 上可积，将其积分值记为 A. 这时，对于任意给定的 $\varepsilon>0$，必存在 I 的一个分割 $\pi=\{I_1,I_2,\cdots,I_k\}$，对任意的值点 $\xi_i\in I_i$ $(i=1,2,\cdots,k)$，有不等式

$$A-\varepsilon < \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\sigma(I_i) < A+\varepsilon,$$

由于 ξ_i 在 I_i 中可以任取，从上式可得

$$A-\varepsilon \leqslant \underline{S}(\pi) \leqslant \overline{S}(\pi) \leqslant A+\varepsilon,$$

由此推知

$$A-\varepsilon \leqslant \underline{\int_I} f\mathrm{d}\sigma \leqslant \overline{\int_I} f\mathrm{d}\sigma \leqslant A+\varepsilon,$$

令 $\varepsilon\to 0$，得出

$$\underline{\int_I} f\mathrm{d}\sigma = \overline{\int_I} f\mathrm{d}\sigma = A.$$

2° **充分性**

现在设(3)成立，将其公共值记为 A. 由定理 16.6，对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 I 的分割 $\pi_\varepsilon=\{J_1,J_2,\cdots,J_t\}$，使得

$$\overline{S}(\pi_\varepsilon) - \underline{S}(\pi_\varepsilon) < \varepsilon. \tag{4}$$

将子矩形 J_i 的每一边平行地向矩形内部收缩同一距离 $\delta>0$，作成一个开矩形 $\tilde{J}_i\subset J_i$，$i=1, 2, \cdots, t$，见图 16-3.

置

$$K = I \cap \left(\bigcup_{i=1}^{t} \tilde{J}_i \right)^c,$$

显然 K 是一个闭集，取 δ 充分小以至于 $\sigma(K) < \varepsilon$. 由于 K 是若干个没有公共内点的矩形的并集，$\sigma(K)$可被定义为那些矩形的面积之和. 设 I 的分割 $\pi = \{I_1, I_2, \cdots, I_k\}$ 满足条件 $\|\pi\| < \delta$. 对任何值点向量 $\xi = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_k)$，我们有

$$\underline{S}(\pi) \leqslant S(\pi, \xi) \leqslant \overline{S}(\pi), \tag{5}$$

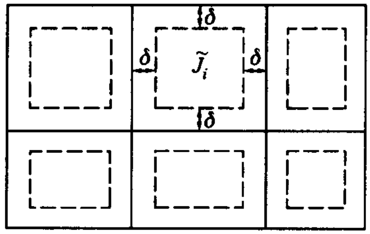


图 16-3

此外

$$\underline{S}(\pi) \leqslant A \leqslant \overline{S}(\pi), \tag{6}$$

由(5)和(6)得

$$\begin{aligned} |S(\pi, \xi) - A| &\leqslant \overline{S}(\pi) - \underline{S}(\pi) \\ &= \sum_{j=1}^{k} (M_j - m_j)\, \sigma(I_j) = \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2, \end{aligned}$$

式中

$$\sum\nolimits_1 = \sum_{I_j \subset K} (M_j - m_j)\, \sigma(I_j),$$

$$\sum\nolimits_2 = \sum_{I_j \not\subset K} (M_j - m_j)\, \sigma(I_j).$$

由于函数 f 在 I 上有界，可设正数 M 适合当 $\boldsymbol{p} \in I$ 时，$|f(\boldsymbol{p})| \leqslant M$，于是得到

$$\sum\nolimits_1 \leqslant 2M \sum_{I_j \subset K} \sigma(I_j) \leqslant 2M\sigma(K) < 2M\varepsilon.$$

另一方面，和式 $\sum_2$ 中的 $I_j \not\subset K$，这样的 I_j 必与某个 $\tilde{J}_i$ 相交. 由 $\tilde{J}_i$ 的作法可知 $I_j \subset J_i$，因此

$$\begin{aligned} \sum\nolimits_2 &= \sum_{i=1}^{t} \sum_{I_j \subset J_i} (M_j - m_j)\, \sigma(I_j) \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{t} (\sup f(J_i) - \inf f(J_i)) \sum_{I_j \subset J_i} \sigma(I_j) \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{t} (\sup f(J_i) - \inf f(J_i))\, \sigma(J_i) \\ &= \overline{S}(\pi_\varepsilon) - \underline{S}(\pi_\varepsilon) < \varepsilon, \end{aligned}$$

所以 $|S(\pi, \xi) - A| < (2M + 1)\varepsilon$，这表明 f 在 I 上可积，并且

$$\int_I f \mathrm{d}\sigma = A. \quad \square$$

定理 16.6 和定理 16.7 相当于单变量积分中的定理 7.14.

例 2 如果$x,y\in\mathbf{R}$为有理数，则$\mathbf{R}^2$中的点(x,y)称为**二维有理点**. 定义 Dirichlet 函数

$$D(\boldsymbol{p})=\begin{cases}1, & \text{若 } \boldsymbol{p} \text{ 是 } \mathbf{R}^2 \text{ 中的有理点;}\\ 0, & \text{若 } \boldsymbol{p} \text{ 不是 } \mathbf{R}^2 \text{ 中的有理点.}\end{cases}$$

易见对$\mathbf{R}^2$中的任何矩形I，函数D在I上不可积，这是因为

$$\underline{\int_I} D\,\mathrm{d}\sigma = 0,\qquad \overline{\int_I} D\,\mathrm{d}\sigma = \sigma(I) > 0.\ \square$$

练习题 16.1

1. 设一元函数f，g在区间$[0,1]$上可积. 求证：
   二元函数$f(x)g(y)$在$I=[0,1]^2$上可积，并且
   $$\iint_I f(x)\,g(y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\int_0^1 f(y)\,\mathrm{d}y.$$
2. 计算积分
   $$\iint_{[0,1]\times[0,1]} \mathrm{e}^{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$
3. 设$a>0$，$I=[-a,a]\times[-a,a]$. 求证：
   $$\iint_I \sin(x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0,$$
   并试从几何上说明这一结果.
4. 采用定理 16.7 中的记号，求证：f在I上可积的必要充分条件是，对任意给定的$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使得凡是$\|\pi\|<\delta$，便有
   $$\sum_{i=1}^{k}(M_i-m_i)\,\sigma(I_i)<\varepsilon.$$
5. 设f在I上可积. 求证：$|f|$在I上也可积，并且
   $$\left|\int_I f\mathrm{d}\sigma\right| \leqslant \int_I |f|\,\mathrm{d}\sigma.$$

§ 16.2 可积函数类

以前节的理论为基础，我们来指出矩形区域上的哪几类函数必定是可积

的．回忆单变量函数积分的理论，就容易想到连续函数应当是可积的．事实上，我们有

定理 16.8 如果函数 f 在 I 上连续，那么 f 在 I 上可积．

这个定理是定理 16.10 的最简单的特例．由于它的重要性，我们在此特别加以强调；读者可以自行证明，因为它与一元积分的相应定理(定理 7.16)的证明是完全一致的，关键是利用有界闭区域上的连续函数必定一致连续这一重要性质．

在单变量积分中，已经证明：如果一个有界函数 f 的不连续点集是一零测集，那么它是可积的，反之亦然．由于二重积分的定义和性质本质上同单变量积分的定义和性质完全一样，我们很自然地会问：在二元情形，还有没有作为可积的必要充分条件的 Lebesgue 定理？为此，我们需要引入二维零测集的概念．

定义 16.2 设 $B\subset\mathbf{R}^2$．如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在可数个闭矩形序列 $\{I_i\}$，$i=1,2,\cdots$，使得

$$B\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}I_i \quad 且 \quad \sum_{i=1}^{\infty}\sigma(I_i)<\varepsilon,$$

则 B 称为(二维)**零测集**．

如果在上述定义中，要求矩形个数为有限，则有

定义 16.3 设 $B\subset\mathbf{R}^2$．如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在有限个闭矩形 I_1，$\cdots$，I_m，使得

$$B\subset\bigcup_{i=1}^{m}I_i \quad 且 \quad \sum_{i=1}^{m}\sigma(I_i)<\varepsilon,$$

则称 B 为**零面积集**．

很显然，零面积集必定是零测集．

注意：在零测集和零面积集的定义中，闭矩形 I_i 也可以改为开矩形 I_i．什么时候用闭矩形，什么时候用开矩形，视方便而定．

定理 16.9 下列性质是明显的：

1° 至多可数集是零测集；

2° 至多可数个零测集之并是零测集；

3° 有限个零面积集之并是零面积集；

4° 集 B 为零面积集，必须且只需 $\overline{B}$ 也是零面积集；

5° 如果 B 是有界闭集，则 B 为零测集的必要充分条件是 B 为零面积集．

证明 前三条性质至为明显．我们只来证 4°和 5°．

4°的充分性是显然的：由 $B\subset\overline{B}$ 可知，当 $\overline{B}$ 为零面积集时，B 必为零面积集．

为了证明必要性，设 B 为零面积集，对任给的 $\varepsilon>0$，有有限个闭矩形 I_1，I_2，…，I_m 使得

$$B\subset\bigcup_{i=1}^{m}I_i\quad,\quad\sum_{i=1}^{m}\sigma(I_i)<\varepsilon$$

同时成立．由于这时 $\bigcup\limits_{i=1}^{m}I_i$ 为闭集，所以仍有

$$\overline{B}\subset\bigcup_{i=1}^{m}I_i,$$

由此可见 $\overline{B}$ 是零面积集．

再来证明5°，只需证明其必要性．

设 B 是紧致的零测集，对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在开矩形序列 $\{I_i\}$ 使得

$$B\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}I_i\quad 且\quad\sum_{i=1}^{\infty}\sigma(I_i)<\varepsilon.$$

由有限覆盖定理，从 $\{I_i\}$ 中可选出有限个开矩形仍能盖住 B，这些开矩形面积之和自然仍小于 ε，所以 B 是零面积集．　□

但是，如果 B 是零测集，那么便不能断言 $\overline{B}$ 必是零测集．例如，用 B 来记 $[0,1]^2$ 中所有的有理点所成的集，由于 B 是可数的，所以是一零测集，但是这时 $\overline{B}=[0,1]^2$，不是零测集．这个例子也说明零测集未必是零面积集．

例 1　设 $B\subset\mathbf{R}^2$ 是一段连续的参数曲线，并且其中至少有一个分量有连续的导数，那么 B 是零面积集．

证明　设 B 有参数方程

$$x=x(t),\quad y=y(t),\quad t\in[\alpha,\beta],$$

其中 x 和 y 是 $[\alpha,\beta]$ 上的连续函数，不妨再设 y 在 $[\alpha,\beta]$ 上有连续的导数．对任意给定的 $\varepsilon>0$，必有分割

$$\alpha=t_0<t_1<\cdots<t_m=\beta,$$

使得当 s，$t\in[t_{i-1},t_i]\ (i=1,2,\cdots,m)$ 时有 $|x(s)-x(t)|<\varepsilon$．置

$$a_i=\min x([t_{i-1},t_i]),\quad b_i=\max x([t_{i-1},t_i]),$$

则有 $b_i-a_i<\varepsilon$．再置

$$c_i=\min y([t_{i-1},t_i]),\quad d_i=\max y([t_{i-1},t_i]),$$

$$I_i=[a_i,b_i]\times[c_i,d_i],\quad i=1,2,\cdots,m,$$

于是当 $t\in[t_{i-1},t_i]$ 时，$(x(t),y(t))\in I_i\ (i=1,2,\cdots,m)$．所以

$$B\subset\bigcup_{i=1}^{m}I_i.$$

设 $|y'(t)|\leqslant M$ 对 $t\in[\alpha,\beta]$ 成立，则由微分中值定理知，存在常数 $M>0$ 使得

$$d_i-c_i\leqslant M(t_i-t_{i-1}),\quad i=1,2,\cdots,m.$$

所以

$$\sum_{i=1}^{m}\sigma(I_i)=\sum_{i=1}^{m}(b_i-a_i)(d_i-c_i)<M\epsilon\sum_{i=1}^{m}(t_i-t_{i-1})$$
$$=M\epsilon(\beta-\alpha).$$

由于 ϵ 是任意的，所以 B 是零面积集. □

注意，若 x 与 y 都不具备连续可导的条件，例 1 的结论可能不成立. 我们在 § 10.8 中曾经构造出一条连续的参数曲线，它可以充满整个正方形，当然这条连续曲线就不是零面积集.

例 2 设函数 f: $[a,b]\to\mathbf{R}$ 连续，那么 f 的图像

$$G(f)=\{(x,f(x)):x\in[a,b]\}$$

是零面积集.

证明 改写为参数方程

$$x=t,\quad y=f(t),\quad t\in[a,b],$$

由例 1 的结果立得. □

例 3 光滑曲线段是零面积集.

在 § 8.2 中说过，光滑曲线段是指参数曲线$(x(t),y(t))$，$t\in[\alpha,\beta]$，其中 x'，y' 在$[\alpha,\beta]$上连续，并且 $x'^2+y'^2>0$，所以光滑曲线段当然是零面积集. □

现在，我们着手介绍 Lebesgue 定理.

定义 16.4 集合 $B\subset\mathbf{R}^2$，设 f: $B\to\mathbf{R}$ 有界. 对任何 $\boldsymbol{x}\in B$ 及 $r>0$，命 $I_{x,r}=B\cap B_r(\boldsymbol{x})$. 用 $\omega_f(\boldsymbol{x},r)$表示函数 f 在 $I_{x,r}$上的振幅. 置

$$\omega_f(\boldsymbol{x})=\lim_{r\to0^+}\omega_f(\boldsymbol{x},r),$$

并称之为函数 f 在点 $\boldsymbol{x}$ 处的振幅.

请读者自行证明

$$\omega_f(\boldsymbol{x},r)=\sup\{|f(\boldsymbol{y}_1)-f(\boldsymbol{y}_2)|:\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2\in I_{\boldsymbol{x},r}\}.$$

下面三条引理的证明和引理 7.1，7.2，7.3 的证明完全类似，这里从略.

引理 16.1 集合 $B\subset\mathbf{R}^2$，函数 f 在点 $\boldsymbol{x}\in B$ 处连续的必要充分条件是 $\omega_f(\boldsymbol{x})=0$.

设 I 是一个矩形. 对于 $\delta>0$，记

$$D_\delta=\{\boldsymbol{x}\in I:\omega_f(\boldsymbol{x})\geqslant\delta\}.$$

用 $D(f)$记 f 在矩形 I 上的不连续点的全体，那么有

引理 16.2 $D(f)=\bigcup_{n=1}^{\infty}D_{\frac{1}{n}}$

引理 16.3 设 f 是定义在有限闭矩形 I 上的函数，如果存在一列开矩形

I_j，$j=1,2,\cdots$，使得 $D(f)\subset\bigcup_{j=1}^{\infty}I_j$. 记 $K=I\setminus\bigcup_{j=1}^{\infty}I_j$，那么对任意 $\varepsilon>0$，一定存在 $\delta>0$，当 $\boldsymbol{x}\in K$，$\boldsymbol{y}\in I$ 且 $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|<\delta$ 时，有 $|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{y})|<\varepsilon$.

现在可以证明本节的主要定理了.

定理 16.10 (Lebesgue) 设函数 f 在闭矩形 I 上有界，那么 f 在 I 上 Riemann 可积的必要充分条件是 f 在 I 上的全体不连续点所成的集 $D(f)$ 是一零测集.

证明 先证必要性. 由引理 16.2，只要证明 $D_{\frac{1}{n}}$ 是零测集. 因为 f 在 I 上可积，由定理 16.7 和 16.6，对任意 $\varepsilon>0$，存在 I 的一个分割 $\pi=\{I_1,\cdots,I_m\}$，使得

$$\sum_{i=1}^{m}\omega_i\sigma(I_i)<\frac{\varepsilon}{n}. \tag{1}$$

命 $E_n=D_{\frac{1}{n}}\setminus l(\pi)$，这里 $l(\pi)$ 记 π 的分割线所构成的集合. 由本节例 3 得知 $l(\pi)$ 是一个零面积集，所以只要证明 E_n 是零测集就够了.

由于 $I\setminus l(\pi)=\bigcup_{i=1}^{m}I_i$，这里 $I_i\ (i=1,\cdots,m)$ 都是开矩形. 所以

$$\begin{aligned}E_n&=D_{\frac{1}{n}}\cap\left(\bigcup_{i=1}^{m}I_i\right)\\&\subset\bigcup\left\{I_i: D_{\frac{1}{n}}\cap I_i\neq\varnothing\right\}.\end{aligned}$$

这说明 E_n 被一列开矩形的并所覆盖，这一列矩形中的每一个都含有 $D_{\frac{1}{n}}$ 中的点. 任取 $\boldsymbol{a}\in D_{\frac{1}{n}}\cap I_i$，必能取到充分小的 r，使得 $B_r(\boldsymbol{a})\subset I_i$. 用 ω_i 和 $\omega_f(\boldsymbol{a},r)$ 分别记 f 在 I_i 和 $B_r(\boldsymbol{a})$ 上的振幅，那么

$$\omega_i\geqslant\omega_f(\boldsymbol{a},r)\geqslant\omega_f(\boldsymbol{a})\geqslant\frac{1}{n}. \tag{2}$$

如果用 $\sum'$ 表示对那些使得 $D_{\frac{1}{n}}\cap I_i\neq\varnothing$ 的 i 求和，那么由(1) 和(2) 可得

$$\frac{\varepsilon}{n}>\sum_{i=1}^{m}\omega_i\sigma(I_i)\geqslant\sum{}'\omega_i\sigma(I_i)\geqslant\frac{1}{n}\sum{}'\sigma(I_i),$$

即

$$\sum{}'\sigma(I_i)<\varepsilon. \tag{3}$$

这正好说明覆盖 E_n 的那列开矩形的面积之和小于 ε，因而 E_n 是一个零面积集，所以 $D(f)$ 是零测集.

再证充分性. 设 $D(f)$ 是一个零测集，因而对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在一列开矩形 J_i，$i=1,2,\cdots$，使得

$$D(f) \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} J_i, \quad 且 \quad \sum_{i=1}^{\infty} \sigma(J_i) < \frac{\varepsilon}{2\omega}, \tag{4}$$

这里 ω 是f 在 I 上的振幅．命

$$K = I \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} J_i,$$

根据引理 16.3，对上述的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得当 $\boldsymbol{x} \in K$，$\boldsymbol{y} \in I$，且 $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|<\delta$ 时有

$$|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})| < \frac{\varepsilon}{4\sigma(I)}. \tag{5}$$

现取分割 $\pi = \{I_1, \cdots, I_m\}$，使得 $\|\pi\|<\delta$，写

$$\sum_{i=1}^{m} \omega_i \sigma(I_i) = \sum\nolimits_1 \omega_i \sigma(I_i) + \sum\nolimits_2 \omega_i \sigma(I_i), \tag{6}$$

这里 $\sum_1$ 表示对 K 和 I_i 相交的那些 i 求和，$\sum_2$ 表示对 K 和 I_i 不相交的那些 i 求和．对 $\sum_1$ 中的项，因为 $K \cap I_i \neq \varnothing$，任取 $\boldsymbol{y}_i \in K \cap I_i$，那么由(5)得

$$\begin{aligned}
\omega_i &= \sup\{|f(\boldsymbol{z}_1) - f(\boldsymbol{z}_2)| : \boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2 \in I_i\} \\
&\leqslant \sup\{|f(\boldsymbol{z}_1) - f(\boldsymbol{y}_i)| + |f(\boldsymbol{y}_i) - f(\boldsymbol{z}_2)| : \boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2 \in I_i, \boldsymbol{y}_i \in K \cap I_i\} \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2\sigma(I)}.
\end{aligned}$$

所以

$$\sum\nolimits_1 \omega_i \sigma(I_i) \leqslant \frac{\varepsilon}{2\sigma(I)} \sigma(I) = \frac{\varepsilon}{2}. \tag{7}$$

对于 $\sum_2$ 中的项，$K \cap I_i = \varnothing$，故当 $\boldsymbol{x} \in I_i$ 时，$\boldsymbol{x} \notin K$，因而 $\boldsymbol{x} \in \bigcup_{i=1}^{\infty} J_i$，即 $I_i \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} J_j$．所以由(4)得

$$\sum\nolimits_2 \sigma(I_i) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \sigma(J_j) < \frac{\varepsilon}{2\omega}.$$

于是

$$\sum\nolimits_2 \omega_i \sigma(I_i) \leqslant \omega \sum\nolimits_2 \sigma(I_i) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{8}$$

综合(6)，(7)和(8)，即得

$$\sum_{i=1}^{m} \omega_i \sigma(I_i) < \varepsilon.$$

由定理 16.6 和 16.7 即知 f 在 I 上可积． □

由 Lebesgue 定理可以马上推得下面的有用的结论．

定理 16.11 设函数 f: $I \to \mathbf{R}$ 有界，集合 $B = \{\boldsymbol{x} \in I : f(\boldsymbol{x}) \neq 0\}$ 为一零面积集，则 f 可积，且

$$\int_I f\mathrm{d}\sigma = 0.$$

证明 显然，开集 $I^\circ \setminus \overline{B} = (\mathbf{R}^2 \setminus \overline{B}) \cap I^\circ$ 中的点都是 f 的连续点，可见 $D(f) \subset \partial I \cup \overline{B}$. 由于 ∂I 是一零面积集，$\overline{B}$ 也是零面积集，故 $\partial I \cup \overline{B}$ 是一零面积集. 由 Lebesgue 定理可知：函数 f 在 I 上可积. 余下的只需证明：f 在 I 上的积分等于零.

对于 I 的任一分割 $\pi = \{I_1, I_2, \cdots, I_k\}$，由于 $\overline{B}$ 是零面积集，故在任何子区间 I_i 上总有一点 ξ_i，使得 $f(\xi_i) = 0$，$i = 1, 2, \cdots, k$. 这时的 Riemann 和

$$\sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\sigma(I_i) = 0.$$

由积分的存在性，可知

$$\int_I f\mathrm{d}\sigma = 0. \quad \square$$

必须指出，如果定理 16.11 中的 B 是一零测集，定理 16.11 的结论不再成立. 例如 f 是定义在 I 上的 Dirichlet 函数(见 § 16.1 的例 2)，那么 B 是 I 中的有理点的全体，因而是一零测集，而这时 f 在 I 上不可积. 这个例子说明引入零面积集是非常必要的.

定理 16.12 设函数 f，g 在 I 上有界且集合 $B = \{\boldsymbol{x} \in I : f(\boldsymbol{x}) \neq g(\boldsymbol{x})\}$ 为一零面积集，那么若 f 与 g 中有一个在 I 上可积，则另一个也在 I 上可积，并且

$$\int_I f\mathrm{d}\sigma = \int_I g\mathrm{d}\sigma.$$

证明 不妨设 g 在 I 上可积，那么使得有界函数 $f - g$ 不等于零的点集是 B，它是零面积集，故由前一定理 $f - g$ 在 I 上可积且

$$\int_I (f - g)\,\mathrm{d}\sigma = 0,$$

由此得出

$$\int_I f\mathrm{d}\sigma = \int_I (f - g)\,\mathrm{d}\sigma + \int_I g\mathrm{d}\sigma = \int_I g\mathrm{d}\sigma. \quad \square$$

由定理 16.12 可知，若函数 f 在区间 I 上有界，只在一个零面积集上改变 f 的值，但仍使之保持有界，那么既不会改变函数的可积性，也不会改变其积分值.

例 4 设

$$f(x, y) = \sin\frac{1}{(1 - x^2)^2 + (1 - y^2)^2},$$

证明：f 在矩形 $I = [-2,2] \times [-2,2]$ 上可积.

证明 函数 f 在 I 中的四个点 $(-1,-1)$，$(-1,1)$，$(1,-1)$，$(1,1)$ 上没

有定义，但这四个点组成的集是零面积集．补充定义 f 在这四点之值为 1（也可以为其他任何常数），f 在 I 上是有界的且其间断点集为零面积集，所以 f 在 I 上是可积的． □

例 5 设

$$f(x,y)=\arctan\frac{1}{y-x^2},$$

证明：f 在 $I=[0,1]\times[0,1]$ 上可积．

证明 函数在抛物线的一段 $B=\{(x,x^2):0\leqslant x\leqslant 1\}$ 上没有定义．由本节例 2 知 B 是零面积集．我们可在 B 上为 f 赋值，使 f 在 I 上保持有界，可见 f 是可积的． □

练习题 16.2

1. 设点列 $\{p_n\}$ 在 $\mathbf{R}^2$ 中有极限，求证：点集 $B=\{p_n\}$ 是一零面积集．
2. 设有界集 $B\subset\mathbf{R}^2$ 且 B' 是零面积集，求证：$\overline{B}$ 也是零面积集．
3. 证明：$[0,1]^2$ 中的全体有理点所成的集不是零面积集，但是零测集．
4. 设闭矩形 $J\subset I$，且 f 在 I 上可积，求证：f 在 J 上也可积．
5. 设可积函数 $f>0$ 在 I 上成立，求证：$\int_I f\mathrm{d}\sigma>0$.
6. 研究定义在区间 $[0,1]^2$ 上的函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{xy}, & x\neq 0 \text{ 且 } y\neq 0,\\ 0, & x=0 \text{ 或 } y=0\end{cases}$$

的可积性．

7. 设 I 是一个有界的矩形，$B=\{p_1,p_2,\cdots,p_n,\cdots\}\subset I$．定义函数

$$f(p)=\begin{cases}0, & p\notin B,\\ \dfrac{1}{n}, & p=p_n,\ n\in\mathbf{N}_+,\end{cases}$$

研究函数 f 在 I 上的可积性．

8. 设函数 f 和 g 在 I 上可积，求证：fg 也在 I 上可积；当 g 在 I 上不取零值时，$\dfrac{f}{g}$ 也在 I 上可积．

问题 16.2

1. 设闭矩形 I 上的连续函数序列 $\{f_n\}$ 满足 $f_1\geqslant f_2\geqslant f_3\geqslant\cdots$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n=0$. 证明：

$$\lim_{n\to\infty}\int_I f_n \mathrm{d}\sigma = 0.$$

2. 设 $\int_I f\mathrm{d}\sigma > 0$,求证:存在闭矩形 $J \subset I$,使得 $f > 0$,在 J 上成立.

§ 16.3　矩形区域上二重积分的计算

学习过本节之后，大家将会看到：计算矩形区域上的二重积分并不需要全新的算法．比较具体地说，二重积分可以先后化为两个单变量函数的积分来计算．

设 $I=[a,b]\times[c,d]$，f：$I\to\mathbf{R}$．记号 $f(x,\cdot)$表示把 x 固定在$[a,b]$中，它是第二个变量的函数．如果对每一个 $x\in[a,b]$，函数 $f(x,\cdot)$在$[c,d]$上可积，通过积分得出定义在$[a,b]$上的函数

$$\varphi(x) = \int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y,\quad x\in[a,b].$$

如果函数 φ 又在$[a,b]$上可积，则又得积分

$$\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x.$$

这个积分叫做**累次积分**，也可记为

$$\int_a^b \mathrm{d}x\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

类似地，可以解释另一个累次积分

$$\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \int_c^d \mathrm{d}y\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

我们自然要问：等式

$$\int_I f\mathrm{d}\sigma = \int_a^b \mathrm{d}x\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_c^d \mathrm{d}y\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

是不是正确？如果上述等式是正确的，那么二重积分的计算问题也就解决了，就是说，二重积分可以化为累次积分来计算，即先后计算两个单变量函数的积分．

现在设函数 f 在闭矩形 I 上有界．置

$$\varphi(x) = \underline{\int_c^d} f(x,y)\,\mathrm{d}y,$$

$$\psi(x) = \overline{\int_c^d} f(x,y)\,\mathrm{d}y,$$

只要 f 在 I 上有界，函数 φ 和 ψ 在$[a,b]$上都有定义.

下面的定理是本节中的主要定理.

定理 16.13 如果 f 在 $I=[a,b]\times[c,d]$上可积，那么单变量函数 φ 与 ψ 在区间$[a,b]$上便可积，并且

$$\int_I f\mathrm{d}\sigma = \int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \psi(x)\,\mathrm{d}x.$$

证明 对于$[a,b]$和$[c,d]$的分割

$$\pi_x:\ a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b,$$

$$\pi_y:\ c=y_0<y_1<\cdots<y_m=d,$$

令

$$I_i=[x_{i-1},x_i],\ i=1,2,\cdots,n,$$

$$J_j=[y_{j-1},y_j],\ j=1,2,\cdots,m,$$

因此子矩形

$$I_i\times J_j,\ i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,m$$

形成了矩形 I 的分割 $\pi=\pi_x\times\pi_y$. 置 $A=\int_I f\mathrm{d}\sigma$, 依定义 16.1, 对任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 当 I 的分割 π 满足 $\|\pi\|<\delta$ 时, 必有

$$A-\varepsilon<\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}f(\xi_i,\eta_j)\Delta x_i\Delta y_j<A+\varepsilon, \tag{1}$$

其中 $\xi_i\in I_i$ 和 $\eta_j\in J_j\ (i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,m)$. 现在，取分割 π_x 与 π_y 满足 $\|\pi_x\|$，$\|\pi_y\|<\dfrac{\delta}{\sqrt{2}}$，那么 $\|\pi\|<\delta$ 足以使(1)式成立. 由(1)式得出

$$\begin{aligned}A-\varepsilon&\leqslant\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\inf f(\xi_i,J_j)\Delta x_i\Delta y_j\\&\leqslant\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sup f(\xi_i,J_j)\Delta x_i\Delta y_j\leqslant A+\varepsilon.\end{aligned}\tag{2}$$

注意到 $\sum\limits_{j=1}^{m}\inf f(\xi_i,J_j)\Delta y_j$ 是函数 $f(\xi_i,\cdot)$ 在$[c,d]$上的下和, 因此

$$\sum_{j=1}^{m}\inf f(\xi_i,J_j)\Delta y_j\leqslant\underline{\int_c^d}f(\xi_i,y)\,\mathrm{d}y=\varphi(\xi_i),$$

同理

$$\sum_{j=1}^{m}\sup f(\xi_i,J_j)\Delta y_j\geqslant\psi(\xi_i),$$

所以由(2)得出

$$A-\varepsilon\leqslant\sum_{i=1}^{n}\varphi(\xi_i)\Delta x_i\leqslant\sum_{i=1}^{n}\psi(\xi_i)\Delta x_i\leqslant A+\varepsilon,$$

这就是说

$$\lim_{\|\pi_x\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\varphi(\xi_i)\Delta x_i = \lim_{\|\pi_x\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\psi(\xi_i)\Delta x_i = A,$$

即定理中的等式成立．□

我们立刻推出

定理 16.14　设 f 在 $I=[a,b]\times[c,d]$ 上可积．如果对每一个 $x\in[a,b]$，函数 $f(x,\cdot)$ 在 $[c,d]$ 上可积，则

$$\int_I f\mathrm{d}\sigma = \int_a^b \mathrm{d}x\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y. \tag{3}$$

同样，如果对于每一个 $y\in[c,d]$，函数 $f(\cdot,y)$ 在 $[a,b]$ 上可积，那么又有

$$\int_I f\mathrm{d}\sigma = \int_c^d \mathrm{d}y\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x. \tag{4}$$

证明　我们只需证(3)．由前一定理，有

$$\varphi(x) = \psi(x) = \int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y,$$

所以

$$\int_I f\mathrm{d}\sigma = \int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}x\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y. \quad \square$$

顺便指出，这个定理实际上也提出了累次积分可以交换顺序的一个充分条件．那就是说，如果 f 在 I 上可积，并且对任意 $x\in[a,b]$，$f(x,\cdot)$ 在 $[c,d]$ 上可积，而且对任意 $y\in[c,d]$，$f(\cdot,y)$ 在 $[a,b]$ 上可积，那么(3)式的右边便等于(4)式的右边．作为一个特例，当 f 在 I 上连续时，我们有如下的定理．

定理 16.15　设 f 是 $[a,b]\times[c,d]$ 上的连续函数，则我们有

$$\int_c^d \mathrm{d}y\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}x\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

这个定理，将在第 20 章中被用到．

例 1　设 $I=[0,\pi]\times[0,1]$，计算二重积分

$$\iint_I y\sin(xy)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

解　记积分值为 A，于是

$$\begin{aligned}
A &= \int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^\pi y\sin(xy)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^\pi \frac{\partial}{\partial x}(-\cos(xy))\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 (\cos(xy))\Big|_{x=\pi}^{x=0}\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 (1-\cos(\pi y))\,\mathrm{d}y = 1-\frac{1}{\pi}\sin(\pi y)\Big|_0^1 = 1. \quad \square
\end{aligned}$$

例 2 令 $I=[0,1]^2$，计算二重积分

$$A=\iint_I xy^3 e^{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

解 我们有

$$\begin{aligned}A&=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1 xe^{x^2}y^3e^{y^2}\mathrm{d}x=\int_0^1 xe^{x^2}\mathrm{d}y\int_0^1 y^3e^{y^2}\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{2}e^{x^2}\Big|_0^1\cdot\frac{1}{2}\int_0^1 te^t\mathrm{d}t=\frac{1}{4}(e-1)\int_0^1 te^t\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{4}(e-1)(te^t-e^t)\Big|_0^1=\frac{1}{4}(e-1),\end{aligned}$$

计算过程中作了换元 $t=y^2$. □

例 3 设

$$f(x,y)=\begin{cases}1-x-y, & x+y\leqslant 1,\\ 0, & x+y>1.\end{cases}$$

计算$\int_I f\mathrm{d}\sigma$,其中 $I=[0,1]^2$.

解 根据定理 16.14,

$$\int_I f\mathrm{d}\sigma=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

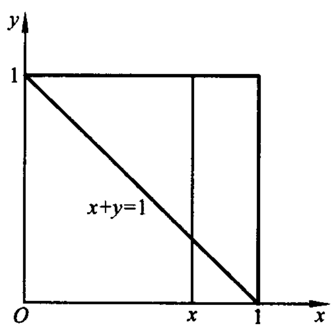


图 16-4

由于

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y&=\int_0^{1-x}f(x,y)\,\mathrm{d}y+\int_{1-x}^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y\\&=\int_0^{1-x}(1-x-y)\,\mathrm{d}y+\int_{1-x}^1 0\mathrm{d}y\\&=(1-x)\int_0^{1-x}\mathrm{d}y-\int_0^{1-x}y\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{2}(1-x)^2,\end{aligned}$$

所以

$$\int_I f\mathrm{d}\sigma=\frac{1}{2}\int_0^1(1-x)^2\,\mathrm{d}x=\frac{1}{6}.\quad\square$$

练习题 16.3

1. 计算下列积分：

(1) $\iint_I \dfrac{x^2}{1+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y, I=[0,1]^2$;

(2) $\iint\limits_I x\cos(xy)\,dxdy, I = [0,\pi/2]\times[0,1]$;

(3) $\iint\limits_I \sin(x+y)\,dxdy, I = [0,\pi]^2$.

2. 设函数 f 在矩形 $I=[a,b]\times[c,d]$ 上有连续的二阶偏导数，计算积分

$$\iint\limits_I \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)\,dxdy.$$

3. 计算积分 $\int\limits_I f d\sigma$，其中 $I = [0,1]^2$：

(1) $f(x,y)=\begin{cases}1, & y\leqslant x^2,\\ 0, & y>x^2;\end{cases}$

(2) $f(x,y)=\begin{cases}x+y, & x^2\leqslant y\leqslant 2x^2,\\ 0, & y<x^2 \text{ 或 } y>2x^2.\end{cases}$

问题 16.3

1. 对 $(x,y)\in[0,1]^2$，定义

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{q}, & x=\dfrac{n}{m},\ y=\dfrac{p}{q},\\ 0, & \text{其它点}.\end{cases}$$

证明：(1) f 在 $[0,1]^2$ 上可积.

(2) $f\left(x, \dfrac{p}{q}\right)$ 对 x 在 $[0,1]$ 上不可积；

$f\left(\dfrac{n}{m}, y\right)$ 对 y 在 $[0,1]$ 上不可积.

2. 对 $(x,y)\in[0,1]^2$，定义

$$g(x,y)=\begin{cases}1, & x=\dfrac{n}{m},\ y=\dfrac{p}{m},\\ 0, & \text{其它点}.\end{cases}$$

证明 $\int_0^1 dx\int_0^1 g(x,y)\,dy$ 和 $\int_0^1 dy\int_0^1 g(x,y)\,dx$ 都存在，但 g 在 $[0,1]^2$ 上不可积.

§16.4 有界集合上的二重积分

在前三节中，我们相当充分地讨论了矩形区域上的二重积分，以此作为基

础，再过渡到任意有界集合上的二重积分，就变成了轻而易举的事情.

定义 16.5 设 $B\subset\mathbf{R}^2$，函数 f: $B\to\mathbf{R}$. 令

$$f_B(p)=\begin{cases}f(p), & \text{当 } p\in B \text{ 时};\\ 0, & \text{当 } p\in B^c \text{ 时}.\end{cases}$$

函数 f_B 在全平面 $\mathbf{R}^2$ 上有定义；如果限制在集合 B 上，f_B 与 f 相等.

定义 16.6 任取有界的闭矩形 $I\supset B$，如果函数 f_B 在 I 上可积，则说函数 f 在 B 上可积，并把数值 $\int_I f_B\mathrm{d}\sigma$ 称为函数 f 在 B 上的（二重）积分，记作

$$\iint_B f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad \text{或者} \quad \int_B f\mathrm{d}\sigma.$$

可以证明，这个定义不依赖于矩形 I 的选择. 事实上，设 I_i 是闭矩形使得 $I_i\supset B$，$i=1$，2. 作一个更大些的闭矩形 I 使得 $I\supset I_i$，$i=1$，2. 这时显然有

$$\int_I f_B\mathrm{d}\sigma=\int_{I_i} f_B\mathrm{d}\sigma,\quad i=1,2.$$

从而有

$$\int_{I_1} f_B\mathrm{d}\sigma=\int_{I_2} f_B\mathrm{d}\sigma.$$

正因为如此，为了方便，今后我们选择 I 的时候，不妨让闭矩形 I 满足 $I^\circ\supset\overline{B}$.

利用 Lebesgue 定理可知，函数 f 在有界集 B 上可积的必要充分条件是 $D(f_B)$ 为零测集.

下面给出的是 f 可积的一个用起来方便的充分条件.

定理 16.16 有界集 $B\subset\mathbf{R}^2$，函数 f: $B\to\mathbf{R}$ 有界，如果集合 B 的边界 ∂B 和 f 在 B 上的间断点集都是零测集，那么 f 在 B 上可积.

证明 取闭矩形 I 满足 $I^\circ\supset\overline{B}$. 由于在开集 $(\overline{B})^c$ 上 f_B 处处为零，所以 $(\overline{B})^c$ 上的每一点都是 f_B 的连续点. 在 B° 上，$f_B=f$，所以，在 B° 上 f_B 的不连续点即 f 的不连续点. 因此，我们有

$$D(f_B)\subset D(f)\cup\partial B.$$

由于 $D(f)$ 与 ∂B 都是零测集，故 $D(f_B)$ 也是零测集，这表明 f_B 在 I 上是可积的，也就是 f 在 B 上可积. □

请注意，定理 16.16 中给出的条件仅仅是一个充分条件，并不是必要的.

定理 16.17 设有界集 $B\subset\mathbf{R}^2$，f: $B\to\mathbf{R}$ 在 B 上可积，那么对任何常数 c，函数 cf 在 B 上也可积，并且

$$\int_B cf\mathrm{d}\sigma = c\int_B f\mathrm{d}\sigma.$$

又若 $g: B\to\mathbf{R}$ 在 B 上可积，那么 $f\pm g$ 在 B 上也可积，并且

$$\int_B (f\pm g)\mathrm{d}\sigma = \int_B f\mathrm{d}\sigma \pm \int_B g\mathrm{d}\sigma.$$

证明 第一个等式的证明留给读者，我们在这里只证明第二个等式，设闭区间 $I\supset B$，于是

$$\int_B (f\pm g)\mathrm{d}\sigma = \int_I (f_B\pm g_B)\mathrm{d}\sigma = \int_I f_B\mathrm{d}\sigma \pm \int_I g_B\mathrm{d}\sigma = \int_B f\mathrm{d}\sigma \pm \int_B g\mathrm{d}\sigma. \quad \square$$

定理 16.18（积分的集合可加性） 设 $B_1, B_2\subset\mathbf{R}^2$ 有界并且 $B_1\cap B_2$ 是一零面积集，若函数 f 在 B_1 和 B_2 上都可积，那么 f 在 $B_1\cup B_2$ 上可积，并且

$$\int_{B_1\cup B_2} f\mathrm{d}\sigma = \int_{B_1} f\mathrm{d}\sigma + \int_{B_2} f\mathrm{d}\sigma.$$

证明 这时，除开一个零面积集之外，成立着等式 $f_{B_1\cup B_2} = f_{B_1} + f_{B_2}$. 设矩形 $I\supset B_1\cup B_2$，我们有

$$\begin{aligned}\int_{B_1} f\mathrm{d}\sigma + \int_{B_2} f\mathrm{d}\sigma &= \int_I f_{B_1}\mathrm{d}\sigma + \int_I f_{B_2}\mathrm{d}\sigma \\ &= \int_I (f_{B_1} + f_{B_2})\mathrm{d}\sigma,\end{aligned}$$

依定理 16.12，又有

$$\int_I (f_{B_1} + f_{B_2})\mathrm{d}\sigma = \int_I f_{B_1\cup B_2}\mathrm{d}\sigma = \int_{B_1\cup B_2} f\mathrm{d}\sigma. \quad \square$$

现在，通过积分可以来定义一个平面有界集合的面积.

定义 16.7 设 $B\subset\mathbf{R}^2$ 为一有界点集，若常值函数 1 在 B 上可积，那么称积分 $\int_B 1\mathrm{d}\sigma$ 为点集 B 的**面积**，记为 $\sigma(B)$. 这时称 B 是**有面积的**.

大家自然会问：在定义 16.3 中定义的零面积集是不是与面积等于零的集合是一回事？答案是肯定的，因为我们有

定理 16.19 设 $B\subset\mathbf{R}^2$ 是一个有界集，则点集 B 为零面积集的必要充分条件是

$$\sigma(B) = \int_B 1\mathrm{d}\sigma = 0.$$

证明 1° **必要性**

设 B 为零面积集，作闭矩形 I 使得 $I^\circ\supset\overline{B}$. 考察在 B 上定义的常值函数 $f=1$，这时函数 f_B 在 I 上取非零值的点集正好是 B. 由于 B 是零面积集，依定理 16.11，知 f_B 在 I 上可积，并且

$$\sigma(B)=\int_B 1\mathrm{d}\sigma=\int_I f_B\mathrm{d}\sigma=0,$$

这正表明点集 B 的面积为零.

2° **充分性**

设$\sigma(B)=0$. 作闭矩形 I 使得 $I^\circ\supset\overline{B}$,这时便有$\int_I f_B\mathrm{d}\sigma=0$. 集合 B 必定没有内点，否则将有$\sigma(B)>0$，由此可知$D(f_B)=\partial B$；又由 f_B 可积，得出∂B 是一零测集，因为∂B 是有界闭的零测集，所以也是零面积集. □

下一定理提供的判别一个集合有面积的法则更加便于应用. 从定理 16.19 的证明中可以看出下列定理的正确性.

定理 16.20 设有界集 $B\subset\mathbf{R}^2$. 则 B 有面积当且只当 B 的边界∂B 是一零面积集.

根据定理 16.20 和 § 16.2 的例 1 和例 2 可知，如果 B 是由有限个连续曲线段围成的集合，或是由有限段光滑参数曲线围成的集合，那么 B 是有面积的. 这些是数学分析中常见的集合. 但是，并非一切有界点集都是有面积的. 例如，用 B 来记正方形$[0,1]^2$ 上的有理点的全体，这时∂B 就是这个边长为 1 的正方形，从而 $\sigma(\partial B)=1$，所以 B 虽然有界，但没有面积.

做积分必须在有面积的集合上进行.

定理 16.21（积分平均值定理） 设 K 是 $\mathbf{R}^2$ 中的有界闭区域，函数 f，g: $K\to\mathbf{R}$ 连续且 g 在 K 上不变号. 于是存在一点 $\xi\in K$，满足

$$\int_K fg\mathrm{d}\sigma=f(\xi)\int_K g\mathrm{d}\sigma.$$

证明 连续函数 g 与 fg 在 K 上都是可积的. 因为 K 是紧致集，连续函数 f 在 K 上取得最小值 $f(\boldsymbol{a})$ 也取得最大值 $f(\boldsymbol{b})$，设在 K 上 $g\geqslant0$，于是

$$f(\boldsymbol{a})g(\boldsymbol{p})\leqslant f(\boldsymbol{p})g(\boldsymbol{p})\leqslant f(\boldsymbol{b})g(\boldsymbol{p})$$

对一切 $\boldsymbol{p}\in K$ 成立. 作积分后得

$$f(\boldsymbol{a})\int_K g\mathrm{d}\sigma\leqslant\int_K fg\mathrm{d}\sigma\leqslant f(\boldsymbol{b})\int_K g\mathrm{d}\sigma.$$

如果$\int_K g\mathrm{d}\sigma=0$,必有 $g(\boldsymbol{p})=0$ 对一切 $\boldsymbol{p}\in K$ 成立,这时定理自然正确. 今设$\int_K g\mathrm{d}\sigma>0$,于是

$$f(\boldsymbol{a})\leqslant\left(\int_K g\mathrm{d}\sigma\right)^{-1}\int_K fg\mathrm{d}\sigma\leqslant f(\boldsymbol{b}).$$

由于 K 是连通集，而 f 在 K 上连续，故介值定理保证了存在一点 $\xi\in K$，使得

$$f(\xi)=\left(\int_K g\mathrm{d}\sigma\right)^{-1}\int_K fg\mathrm{d}\sigma,$$

这就是需要证明的. □

如果取 $g=1$，那么得到

推论 设 K 是 $\mathbf{R}^2$ 中的有界闭区域，函数 f 在 K 上连续，那么存在一点 $\xi\in K$,使得

$$\int_K f\mathrm{d}\sigma = f(\xi)\sigma(K).$$

练习题 16.4

1. 证明定理 16.20

2. 证明

$$1.96 < \iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 10} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{100+\cos^2 x+\cos^2 y} < 2.$$

§16.5 有界集合上积分的计算

我们有下列的

定理 16.22 设点集

$$B=\{(x,y):y_1(x)\leqslant y\leqslant y_2(x),a\leqslant x\leqslant b\},$$

其中函数 y_1 和 y_2 在$[a,b]$上连续(图 16-5)，函数 f 在 B 上可积. 如果对每一 $x\in[a,b]$，单变量积分

$$\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

存在，那么

$$\int_B f\mathrm{d}\sigma = \int_a^b \mathrm{d}x\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y. \qquad (1)$$

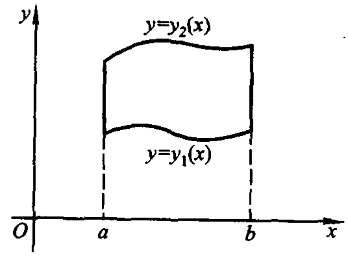


图 16-5

证明 令

$$c=\inf y_1([a,b]),\quad d=\sup y_2([a,b]),$$

于是 $I=[a,b]\times[c,d]\supset B$，由于 f 在 B 上可积，所以 f_B 在 I 上可积. 并且

$$\int_B f\mathrm{d}\sigma = \int_I f_B\mathrm{d}\sigma.$$

由所给条件，对每一 $x\in[a,b]$，函数 $f_B(x,\cdot)$在$[c,d]$上可积(这是因为这个函数在$(c,y_1(x))$与$(y_2(x),d)$上都等于零，所以它在$[c,y_1(x)]$与$[y_2(x),d]$上可积，而它在$[y_1(x),y_2(x)]$上的可积性是定理的一个条件)，依定理 16.14

$$\int\limits_I f_B\mathrm{d}\sigma=\int_a^b\mathrm{d}x\int_c^d f_B(x,y)\,\mathrm{d}y,$$

但是

$$\int_c^d f_B(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_c^{y_1(x)}f_B(x,y)\,\mathrm{d}y+\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}f_B(x,y)\,\mathrm{d}y$$
$$+\int_{y_2(x)}^{d}f_B(x,y)\,\mathrm{d}y,$$

由于在上式的右边，第一个和最后一个积分的被积函数是零，因此

$$\int_c^d f_B(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}f_B\mathrm{d}y=\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}f(x,y)\,\mathrm{d}y,$$

最后得到

$$\int\limits_B f\mathrm{d}\sigma=\int_a^b\mathrm{d}x\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}f(x,y)\,\mathrm{d}y.\quad\square$$

类似地，如果 B 是这样的集合

$$B=\{(x,y):\ x_1(y)\leqslant x\leqslant x_2(y),\ c\leqslant y\leqslant d\},$$

其中函数 x_1 与 x_2 在$[c,d]$上连续，f 在 B 上可积，且对每一个 $y\in[c,d]$，积分 $\int_{x_1(y)}^{x_2(y)}f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 存在，于是有

$$\int\limits_B f\mathrm{d}\sigma=\int_c^d\mathrm{d}y\int_{x_1(y)}^{x_2(y)}f(x,y)\,\mathrm{d}x.\tag{2}$$

见图 16－6.

例 1 计算积分

$$A=\iint\limits_B x^2y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 B 是图 16－7 所围成的三角形.

解 这时 B 的上、下边界的方程分别为

$$y=\frac{b}{a}x \text{ 和 } y=0,\ \text{当 } x\in[0,a],$$

依公式(1)可得

$$A=\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^{\frac{b}{a}x}x^2y^2\mathrm{d}y=\frac{1}{3}\int_0^a x^2\left(y^3\Big|_{y=0}^{y=\frac{b}{a}x}\right)\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{3}\left(\frac{b}{a}\right)^3\int_0^a x^5\mathrm{d}x=\frac{1}{18}(ab)^3.\quad\square$$

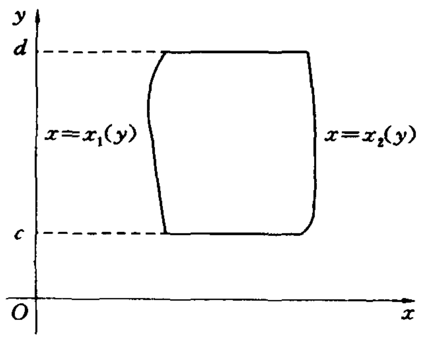


图 16-6

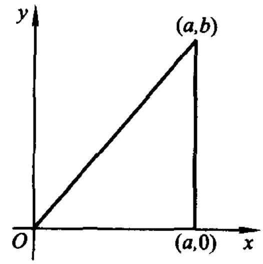


图 16-7

例 2 计算积分

$$A = \iint_B (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 B 是由两组平行直线

$$y = a,\ y = 3a;\ y = x,\ y = x + a$$

所围成的平行四边形.

图 16-8 中，对 $a>0$ 的情形画出了这个图形.

解 这时，如果利用公式(1)就不合算了，因为刻画集合 B 所需要的下、上边界 y_1 与 y_2 要用分段函数才能表示. 采用公式(2)对我们有利，事实上，这时左、右边界的方程分别是 $x=y-a$ 和 $x=y$，这里 $y\in[a,3a]$.
计算积分

$$\begin{aligned} A &= \int_a^{3a}\mathrm{d}y\int_{y-a}^{y}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{3}\int_a^{3a}x^3\Big|_{y-a}^{y}\mathrm{d}y + a\int_a^{3a}y^2\mathrm{d}y = 14a^4. \quad \square \end{aligned}$$

例 3 计算积分

$$A = \iint_B xy^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 $B=\{(x,y): |x|+|y|\leqslant 1\}$.

解 这时 B 是以(1,0)，(0,1)，(-1,0)，(0,-1)四点为顶点的正方形(图 16-9). 无论采用公式(1)与(2)，都不得不将 B 分块处理. 当前，有两种分块的方式，第一种是把横轴下方和上方的两个三角形分别记为 B_1 和 B_2，第二种是把纵轴左方和右方的两个三角形分别记为 C_1 和 C_2. 对这个具体的问题，由于被积函数的性质，这两种分块方式带来的计算过程的繁简程度是不一样的. 我们采取第一种分法. 在定积分中，我们学过，奇函数在一个关于原点对称的区间上积分为零，所以我们可以立刻写出

$$\iint\limits_{B_1} xy^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-1}^{0} y^2\mathrm{d}y\int_{-1-y}^{1+y} x\mathrm{d}x = 0,$$

$$\iint\limits_{B_2} xy^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{0}^{1} y^2\mathrm{d}y\int_{y-1}^{1-y} x\mathrm{d}x = 0,$$

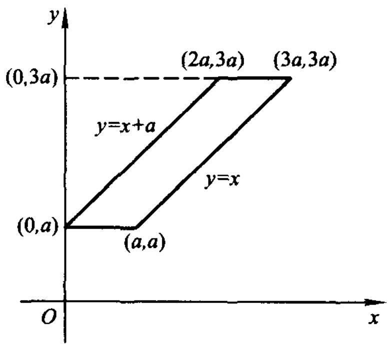


图　16 - 8

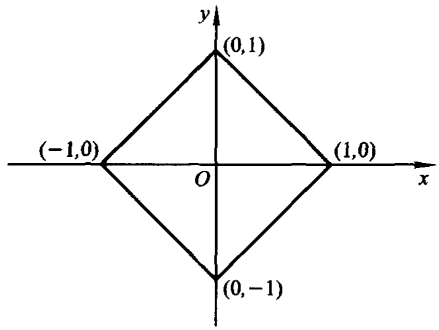


图　16 - 9

可见

$$\iint\limits_{B} xy^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{B_1} + \iint\limits_{B_2} = 0.$$

如果采用第二种分法，计算将复杂许多. □

如果我们对积分有比较深刻的认识，并且注意到积分域的几何对称性和被积函数的奇偶性，那么求这个积分完全不需要任何计算.

事实上，我们的积分域 B 是关于纵轴对称的，并且被积函数 xy^2 对于固定的 y 而言是 x 的奇函数. 在做 Riemann 和的时候，如果我们对 B 作分割时照顾到这种左右对称的特征，就是说在纵轴的左边取一小块，其面积为 $\mathrm{d}\sigma$，那么就在纵轴的右边取一个与之对称的小块；如果在左边的小块上取(ξ,η)作为值点，那么就在右边的小块上取对称的点$(-\xi,\eta)$作为值点. 这两部分在积分和中的贡献就是 $\xi\eta^2\mathrm{d}\sigma+(-\xi)\eta^2\mathrm{d}\sigma=0$，因此积分和也等于零，从而积分值 A 也必须是零.

这虽然是一种特殊的分割和对值点的特殊选取，但是在确认了函数 f 是可积的情况下，这种作法是合理的.

例 4　计算累次积分

$$A = \int_0^1 \mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{y}} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x.$$

解　在 § 6.4 中，我们曾经指出$\dfrac{\sin x}{x}$的原函数是不能用初等函数表达的，

因此，按照题中指定的顺序来计算 A 是不可能的．我们必须交换累次积分的顺序，再走下一步．因此，先应将这个累次积分"还原"为二重积分，为此应当确定积分域 B．由本题看出，B 是由曲线 $x=y$，$x=\sqrt{y}$ 和 $y=0$，$y=1$ 所夹成的图形(见图 16－10)．

对照这个图形，便很容易地把累次积分改变成如下的顺序：

$$A=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x}\frac{\sin x}{x}dy=\int_0^1(x-x^2)\frac{\sin x}{x}dx$$
$$=\int_0^1(1-x)\sin x\,dx=1-\sin 1.\quad\square$$

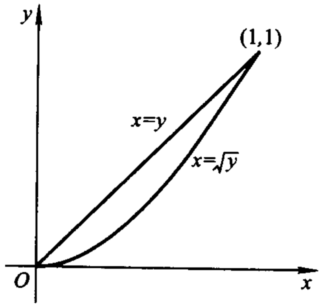


图 16－10

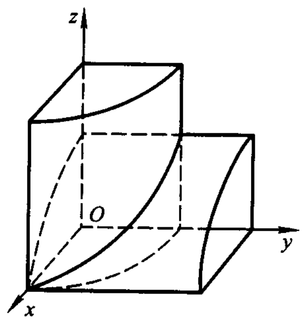


图 16－11

例5 计算由两个圆柱体 $x^2+y^2\leqslant a^2$ 和 $x^2+z^2\leqslant a^2$ 交成的体积．

解 在图 16－11 中画出了这个立体在第一卦限中的那一部分，整个体积 A 就是这一部分体积的 8 倍．因此

$$A=8\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\leqslant a^2\\ x\geqslant 0,y\geqslant 0}}\sqrt{a^2-x^2}\,dxdy=8\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}dy$$
$$=8\int_0^a(a^2-x^2)\,dx=\frac{16}{3}a^3.\quad\square$$

练习题 16.5

1. 计算下列积分：

(1) $\iint\limits_D\cos(x+y)\,dxdy$，其中 D 由 $x=0,y=x,y=\pi$ 围成；

(2) $\iint\limits_D xy^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, D 由 $y^2=4x$ 和 $x=1$ 围成;

(3) $\iint\limits_D \mathrm{e}^{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $D=\{(x,y):|x|+|y|\leqslant 1\}$;

(4) $\iint\limits_D |xy|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $D=\{(x,y):x^2+y^2\leqslant a^2\}$;

(5) $\iint\limits_D x\cos(xy)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, D 同(4)题;

(6) $\iint\limits_D |\cos(x+y)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $D=[0,1]^2$;

(7) $\iint\limits_D y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, D 由旋轮线

$$\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t), \end{cases} \quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi$$

与 $y=0$ 围成.

(8) $\iint\limits_D [x+y]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $D=[0,2]^2$.

2. 改变下列累次积分的次序:

(1) $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{x^2} f(x,y)\,\mathrm{d}y$;

(2) $\int_1^{\mathrm{e}} \mathrm{d}x\int_0^{\log x} f(x,y)\,\mathrm{d}y$;

(3) $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_{x^2}^{x} f(x,y)\,\mathrm{d}y$;

(4) $\int_a^b \mathrm{d}x\int_a^{x} f(x,y)\,\mathrm{d}y$;

(5) $\int_{-1}^1 \mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x,y)\,\mathrm{d}y$;

(6) $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_{x-1}^{1-x} f(x,y)\,\mathrm{d}y$;

(7) $\int_0^{\pi} \mathrm{d}x\int_0^{\cos x} f(x,y)\,\mathrm{d}y$.

3. 设 f 为一元连续函数, 求证

$$\int_0^a \mathrm{d}x\int_0^x f(x)f(y)\,\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\left(\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2.$$

4. 设 f 为连续函数, 证明:

$$\int_0^a \mathrm{d}x\int_0^x f(y)\,\mathrm{d}y=\int_0^a (a-t)f(t)\,\mathrm{d}t.$$

5. 设 f 为一连续函数，求极限

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{\pi r^2}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant r^2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

§16.6 二重积分换元

在本书上册的 §7.4 中，已经看到定积分换元(或称变量代换)在计算积分时发挥过多么重要的作用. 在那里，换元的唯一目的是把被积函数变得比较简单，或是变成便于求出原函数. 在换元之下，一个积分区间被变成另一个区间，这里没有任何便宜可讨.

二重积分也有换元的技巧，但是，换元有两个目的：第一是把被积函数简化，第二是把积分域简化. 相比之下，在很多场合，第二个目的远比第一个目的重要. 可以想到，如果通过换元，能够把一个由曲线围成的积分域变成由四条直线围成的域，甚至变成一个矩形，那将带来多大的方便. 在积分域得到简化的条件下，这时哪怕把被积函数弄得更复杂一些，我们也认为是值得的.

除了上面谈到的这一点区别之外，二重积分的换元公式与定积分的换元公式倒是没有什么差别，甚至可以说是完全相似的. 为了看清这一事实，我们回顾一下定积分换元公式(上册，定理 7.11). 这里，我们不是完全照抄定理 7.11，而是把它按照现在的需要加以改写.

设函数 F 在闭区间 $I=[a,b]$ 上连续，函数 φ 在区间 $J=[\alpha,\beta]$ 上连续可导，并且 $\varphi'(t)\neq 0$ 对一切 $t\in J$ 成立，$I=\varphi(J)$，那么

$$\int_I F(x)\,\mathrm{d}x=\int_J F\circ\varphi(t)\,|\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t, \tag{1}$$

在这里，我们规定

$$\int_I=\int_a^b \quad 且 \quad \int_J=\int_\alpha^\beta. \tag{2}$$

公式(1)看上去与定理 7.11 中写出的公式有些不同，实际上它们是一样的. 这是因为，当 $\varphi'>0$ 时，变换 $x=\varphi(t)$ 把区间 J 上升地变为 I，这时(1)就是

$$\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta F\circ\varphi(t)\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t, \tag{3}$$

如果 $\varphi'<0$，那么当 t 从左到右地扫过区间 J 时，函数 $\varphi(t)$ 从右到左地扫过区间 I. 也就是说，此时 $\varphi(\alpha)=b$，$\varphi(\beta)=a$. 因此公式(1)变为

$$\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x = -\int_\alpha^\beta F\circ\varphi(t)\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t,$$

总之也就是

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} F(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta F\circ\varphi(t)\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t,$$

这正是定理 7.11 中的公式.

现在对上面的讨论作一点几何解释. 如果 $\varphi'(t)>0$ 在$[\alpha,\beta]$上成立, 自然就保证 φ 是严格递增的. 我们把 $x=\varphi(t)$看成是把$[\alpha,\beta]$上的点变到$[a,b]$上的点的一个映射, 这个映射是可逆的. $[\alpha,\beta]$的一个有代表性的子区间$[t_{i-1},t_i]$被一对一地映成了$[a,b]$的子区间$[x_{i-1},x_i]=[\varphi(t_{i-1}),\ \varphi(t_i)]$, $i=1,\ \cdots,\ n$. 由等式 $\Delta x_i=\varphi'(\tau_i)\Delta t_i$ 可得

$$\frac{\Delta x_i}{\Delta t_i}=\frac{x_i-x_{i-1}}{t_i-t_{i-1}}=\varphi'(\tau_i),$$

其中 $\tau_i\in(t_{i-1},t_i)$, 这个式子表明: 变换后的子区间与变换前的子区间的"长度比"等于 φ'在子区间(t_{i-1},t_i)内某一点上的值. 在无穷小的意义上, φ'可以被说成是映射 $x=\varphi(t)$对线段的"伸缩比".

现在来讨论二重积分的换元公式. 设有界闭域 $D\subset\mathbf{R}^2$, 连续函数 F: $D\to\mathbf{R}$. 映射 $\boldsymbol{\varphi}$ 由公式

$$x=x(u,v),\qquad y=y(u,v),\qquad (u,v)\in\Delta \tag{4}$$

定义, 其中 Δ 是 uv 平面上的有界闭区域. 设映射 $\boldsymbol{\varphi}$ **是正则的**, 即 $\boldsymbol{\varphi}$ 是由 Δ 到 D 上的一对一的映射, $\boldsymbol{\varphi}$ 在 Δ 上连续可导, 并且

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\[2mm] \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}\neq 0 \tag{5}$$

在 Δ 上成立.

我们一再提及, Jacobian $J\boldsymbol{\varphi}$ 相当于一元函数的导数, 由此不难联想到 Jacobian 行列式 $\det J\boldsymbol{\varphi}$ 的绝对值 $\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|$ 就相当于映射(4)对面积的伸缩比, 有了这一观念, 可以从公式(1)联想起二重积分的换元公式应是

$$\iint_D F(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_\Delta F\circ\boldsymbol{\varphi}(u,v)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v, \tag{6}$$

也可以写成

$$\iint_{\boldsymbol{\varphi}(\Delta)} F(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_\Delta F(x(u,v),y(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v. \tag{7}$$

如果面积的伸缩比的公式得到证实, 那么二重积分的换元公式也就容易推得了. 我们指出, 在所给的条件下, 当区域 Δ 有面积时, $D=\boldsymbol{\varphi}(\Delta)$也有面

积，反之也一样；区域 Δ 的边界 $\partial\Delta$ 被 $\boldsymbol{\varphi}$ 映成了 D 的边界 ∂D，即 $\boldsymbol{\varphi}(\partial\Delta)=\partial\boldsymbol{\varphi}(\Delta)$；如果 $\partial\Delta$ 是零面积集，那么 ∂D 也是零面积集．当然，这些事实是需要证明的．但是，这些结论的详细证明，实在过于冗长繁琐，不论是对教还是学，都是沉重的负担．因此，我们有意识地舍弃严格的证明，而采用一种比较温和的、不甚严格的处理．这样做，既不会掩盖二重积分换元的思想本质，由于我们的习题中常见的那些区域相当简单，这种处理方式也足以够用．

设 $\boldsymbol{p}_0=(u_0,v_0)\in\Delta^\circ$，由于 $\boldsymbol{p}_0$ 是 Δ 的内点，所以可取 h 和 k 充分小(为确定起见，不妨设 $h>0,k>0$)，使得由四点

$$(u_0,v_0),\ (u_0+h,v_0),\ (u_0+h,v_0+k),\ (u_0,v_0+k)$$

为顶点的矩形，全在 Δ° 中(图 16－12)，这个矩形的面积等于 hk．在映射 $\boldsymbol{\varphi}$ 之下，这个矩形变成了 xy 平面上的一个"曲边平行四边形"(图 16－13)，它的四条边界的向量方程分别是

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{r}=\boldsymbol{\varphi}(u_0+u,v_0), && 0\leqslant u\leqslant h;\\
&\boldsymbol{r}=\boldsymbol{\varphi}(u_0+h,v_0+v), && 0\leqslant v\leqslant k;\\
&\boldsymbol{r}=\boldsymbol{\varphi}(u_0+u,v_0+k), && 0\leqslant u\leqslant h;\\
&\boldsymbol{r}=\boldsymbol{\varphi}(u_0,v_0+v), && 0\leqslant v\leqslant k.
\end{aligned}$$

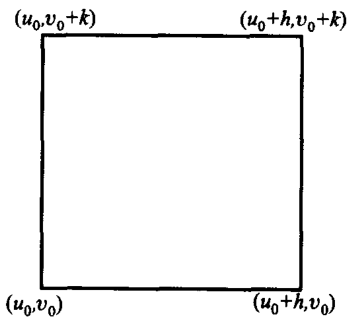


图 16－12

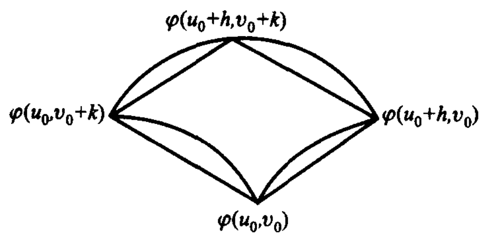


图 16－13

当 h 和 k 都很小时，其面积可以很好地被以下四点 $\boldsymbol{\varphi}(u_0,v_0)$，$\boldsymbol{\varphi}(u_0+h,v_0)$，$\boldsymbol{\varphi}(u_0+h,v_0+k)$ 和 $\boldsymbol{\varphi}(u_0,v_0+k)$ 为顶点的四边形来近似，而后者又可以很好地被以三点 $\boldsymbol{\varphi}(u_0,v_0)$，$\boldsymbol{\varphi}(u_0+h,v_0)$ 和 $\boldsymbol{\varphi}(u_0,v_0+k)$ 为顶点的三角形面积的两倍来近似．也就是说，"曲边平行四边形"的面积可被

$$\|(\boldsymbol{\varphi}(u_0+h,v_0)-\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{p}_0))\times(\boldsymbol{\varphi}(u_0,v_0+k)-\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{p}_0))\| \tag{8}$$

来近似．

由于在给定的条件下，映射 $\boldsymbol{\varphi}$ 是可微的，所以有

$$\boldsymbol{\varphi}(u_0+h,v_0)-\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{p}_0)=\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial u}(\boldsymbol{p}_0)h+\boldsymbol{\xi},$$

$$\boldsymbol{\varphi}(u_0, v_0 + k) - \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{p}_0) = \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial v}(\boldsymbol{p}_0) k + \boldsymbol{\eta},$$

其中

$$\|\boldsymbol{\xi}\| = o(h), \qquad \|\boldsymbol{\eta}\| = o(k),$$

代入(8)，可知“曲边平行四边形”的面积的一个很好的近似是

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial u}(\boldsymbol{p}_0) \times \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial v}(\boldsymbol{p}_0) \right\| hk + o(hk) \\ = & \left\| \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial u}(\boldsymbol{p}_0) \times \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial v}(\boldsymbol{p}_0) \right\| hk(1 + o(1)), \end{aligned}$$

令 $h \to 0$，$k \to 0$，可见“曲边平行四边形”的面积与矩形面积 hk 之比的极限正是

$$\left\| \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial v} \right\|,$$

上述表达式也可以写成

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = |\det J\boldsymbol{\varphi}|. \tag{9}$$

现在，我们可以开始证明二重积分的换元公式. 用区间 I 把 uv 平面上的闭区域 Δ 盖起来，用两族平行直线 $u = u_i$ $(i = 0, 1, \cdots, m)$和 $v = v_j$ $(j = 0, 1, \cdots, n)$来分割 I，其中

$$u_0 < u_1 < \cdots < u_{m-1} < u_m,$$

$$v_0 < v_1 < \cdots < v_{n-1} < v_n,$$

令 $\Delta u_i = u_i - u_{i-1}$ $(i = 1, 2, \cdots, m)$，$\Delta v_j = v_j - v_{j-1}$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$. 我们一共得到 mn 个矩形，在映射 $\boldsymbol{\varphi}$ 的作用之下，它们变成了 xy 平面上 mn 个“曲边平行四边形”.

在做积分和的时候，我们只需考虑那些完全被包含在 D 中的“曲边平行四边形”，把它们记为 D_i $(i = 1, 2, \cdots, k)$，记 $D_i = \boldsymbol{\varphi}(\Delta_i)$，其中 Δ_i 是完全被包含在 Δ 中的矩形，$i = 1, 2, \cdots, k$，任取一点 $\boldsymbol{\eta}_i \in D_i$，并设 Δ_i 中唯一的点 $\boldsymbol{\xi}_i$ 使得 $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\xi}_i) = \boldsymbol{\eta}_i$，$i = 1, 2, \cdots, k$. 做积分和

$$\sum_{i=1}^{k} F(\boldsymbol{\eta}_i) \sigma(D_i), \tag{10}$$

由关于面积伸缩比的讨论，可知

$$\sigma(D_i) \sim |\det J\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\xi}_i)| \sigma(\Delta_i), \quad i = 1, 2, \cdots, k,$$

代入(10)，可得

$$\sum_{i=1}^{k} F(\boldsymbol{\eta}_i) \sigma(D_i) \sim \sum_{i=1}^{k} F \circ \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\xi}_i) |\det J\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\xi}_i)| \sigma(\Delta_i). \tag{11}$$

在分割无限加细的极限过程中，(11)双方的差别将消失，因此得到

$$\int_D F\mathrm{d}\sigma = \int_\Delta F\circ\boldsymbol{\varphi}\,|\det J\boldsymbol{\varphi}|\,\mathrm{d}\sigma,$$

这就证明了二重积分的换元公式(7).

看几个例子.

例 1　设 D 是由四条抛物线

$y^2 = px$，$y^2 = qx$，$x^2 = ay$，$x^2 = by$

$(0 < p < q, 0 < a < b)$所围成的集合(图 16－14)，计算 D 的面积和二重积分

$$A = \iint_D \frac{1}{xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

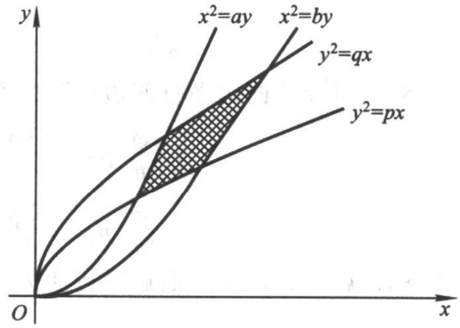


图　16－14

解　引入参数 u，v 使

$$y^2 = ux,\quad x^2 = vy,$$

其中 $p \leqslant u \leqslant q$，$a \leqslant v \leqslant b$. 这说明，在这种变换之下，图形 D 变成了 uv 平面上的区间$[p,q]\times[a,b]$. 解出 x 和 y，得到

$$x = (uv^2)^{1/3},\quad y = (u^2v)^{1/3}.$$

通过简单的计算可得

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = -\frac{1}{3}.$$

于是

$$\sigma(D) = \int_D \mathrm{d}\sigma = \frac{1}{3}\int_p^q \mathrm{d}u\int_a^b \mathrm{d}v = \frac{1}{3}(q-p)(b-a).$$

注意到 $xy = uv$，便有

$$\begin{aligned}A &= \iint_D \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{xy} = \frac{1}{3}\int_p^q \frac{\mathrm{d}u}{u}\int_a^b \frac{\mathrm{d}v}{v}\\ &= \frac{1}{3}(\log q - \log p)(\log b - \log a)\\ &= \frac{1}{3}\left(\log\frac{q}{p}\right)\left(\log\frac{b}{a}\right).\quad\square\end{aligned}$$

例 2　设 D 是由 $x=0$，$y=0$ 和 $x+y=1$ 所围成的图形，试求积分

$$A = \iint_D \exp\left(\frac{x-y}{x+y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中，记号 $\exp(t) = \mathrm{e}^t$.

解　这时集合 D 是一个三角形闭区域(图 16－15)，形状并不复杂，这时二重积分计算的困难是由被积函数所造成的. 此外，还要注意，这时被积函数虽然在原点处没有定义，但它在 $D\setminus\{(0,0)\}$上是有界的：

$$0 < \exp\left(\frac{x-y}{x+y}\right) = \exp\left(1 - \frac{2y}{x+y}\right) \leqslant e,$$

因此积分存在不成问题.

令 $x - y = u$, $x + y = v$, 由此解出

$$\begin{cases} x = \dfrac{u+v}{2}, \\ y = \dfrac{v-u}{2}, \end{cases}$$

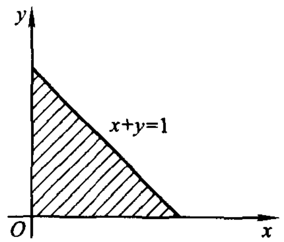


图 16 - 15

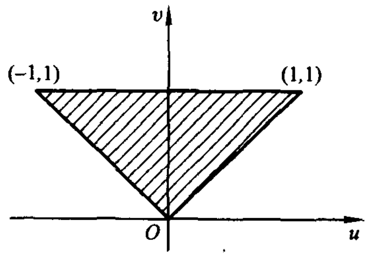


图 16 - 16

这个映射把 uv 平面上的闭区域 $\Delta = \{(u,v): |u| \leqslant v, 0 \leqslant v \leqslant 1\}$ (图 16 - 16) 映成 xy 平面上的闭区域 D, 而且显然是一一对应的. 这时

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{2},$$

由积分换元公式得到

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\iint_{\Delta} e^{u/v} \mathrm{d}u\mathrm{d}v = \frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{d}v \int_{-v}^{v} e^{u/v} \mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int_0^1 v e^{u/v}\Big|_{u=-v}^{u=v} \mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 v\,(e - e^{-1})\,\mathrm{d}v = \frac{1}{4}(e - e^{-1}). \quad \square \end{aligned}$$

现在来介绍一种常用的换元——**极坐标换元**. 令

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \end{cases} \tag{12}$$

这时

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r, \tag{13}$$

如果当 $(r,\theta) \in \Delta$ 时, 映射(12)将 Δ 一对一地变为 D, 那么

$$\iint_D F(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\Delta} F(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta. \tag{14}$$

细心的读者不难发现, 公式(14)应当只有在区域 Δ 不包含着极点时才成立, 如果 Δ 包含着极点, 显然由(13)式可见, 在极点上 Jacobian 行列式等于

零，不符合换元所要求的条件．事实上，在这样的一个点上不满足条件，换元公式仍然成立．严格的证明就不在这里给出了．

例 3 球体 $x^2+y^2+z^2\leqslant a^2$ 被柱面 $x^2+y^2=ax$ 所截，求截下的体积．

解 我们只需计算上半球体被截下的体积，然后二倍之．设

$$D=\{(x,y):\ x^2+y^2\leqslant ax\},$$

先来算出

$$A=\iint\limits_D\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

用极坐标换元，得

$$\begin{aligned}A&=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{a\cos\theta}r\sqrt{a^2-r^2}\,\mathrm{d}r=2\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{a\cos\theta}r\sqrt{a^2-r^2}\,\mathrm{d}r\\&=\frac{2}{3}\int_0^{\pi/2}(a^2-r^2)^{3/2}\Big|_{r=a\cos\theta}^{r=0}\mathrm{d}\theta=\frac{2}{3}a^3\int_0^{\pi/2}(1-\sin^3\theta)\,\mathrm{d}\theta\\&=\frac{2}{3}a^3\int_0^{\pi/2}[1-\sin\theta\,(1-\cos^2\theta)]\,\mathrm{d}\theta\\&=\frac{2}{3}a^3\left(\theta+\cos\theta-\frac{1}{3}\cos^3\theta\right)\Big|_0^{\pi/2}=\frac{2}{3}a^3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right),\end{aligned}$$

欲求的体积是 $\frac{4}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)a^3$．□

例 4 求椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 所包围的面积．

解 记 $D=\left\{(x,y):\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1\right\}$，所求的面积为 $\iint\limits_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y$．为计算这个积分，作广义极坐标变换

$$x=ar\cos\theta,\quad y=br\sin\theta,$$

它的 Jacobian 行列式为

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\begin{vmatrix}a\cos\theta & -ar\sin\theta\\ b\sin\theta & br\cos\theta\end{vmatrix}=abr.$$

由此得

$$\iint\limits_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\int_0^{2\pi}abr\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\pi ab.\quad\square$$

极坐标换元中，由 Jacobian 行列式带来的因子 r，可能使被积函数变成其原函数能够求出的新形式，下面是一个有趣的例子．

例 5 计算积分 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$．

解 在上册第 6 章的结束语中，我们已经提到 e^{-x^2} 的原函数是不可以用初等函数来表达的．因此，局限在一元函数之内，这个积分值是无法直接得到的．

对于任何 $R>0$，考虑矩形 $[-R,R]\times[-R,R]$ 上的二重积分

$$I(R)=\iint\limits_{[-R,R]^2}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

化成累次积分后

$$I(R)=\left(\int_{-R}^{R}\mathrm{e}^{-x^2}\right)^2=4\left(\int_0^R\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\right)^2.$$

另一方面，我们知道，圆盘 $x^2+y^2\leqslant R^2$ 被 $[-R,R]^2$ 完全包含在内，而圆盘 $x^2+y^2\leqslant 2R^2$ 完全包含了 $[-R,R]^2$，由此可得

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant 4\left(\int_0^R\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 2R^2}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

利用极坐标换元公式(14)，得出

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R r\mathrm{e}^{-r^2}\mathrm{d}r=\pi(1-\mathrm{e}^{-R^2}),$$

又有

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 2R^2}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi(1-\mathrm{e}^{-2R^2}),$$

所以

$$\pi(1-\mathrm{e}^{-R^2})\leqslant 4\left(\int_0^R\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\pi(1-\mathrm{e}^{-2R^2}).$$

令 $R\to+\infty$，得出

$$4\left(\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\right)^2=\pi,$$

最后得到所谓“概率积分”

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.\quad\square$$

练习题 16.6

1. 计算下列二重积分：

(1) $\displaystyle\iint\limits_D(x-y)^2\sin(x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,

其中 D 是由四点 $(\pi,0)$，$(2\pi,\pi)$，$(\pi,2\pi)$，$(0,\pi)$ 顺次连成的正方形；

(2) $\displaystyle\iint\limits_D(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,

其中 D 由曲线 $x^2-y^2=1$，$x^2-y^2=2$，$xy=1$ 和 $xy=2$ 围成；

(3) $\iint\limits_D (x-y^2)\,dxdy$,

其中 D 由曲线 $y=2, y^2-y-x=0, y^2+2y-x=0$ 围成.

2. 计算由下列曲线围成的图形的面积:

(1) $(a_1x+b_1y+c_1)^2+(a_2x+b_2y+c_2)^2=1$, 式中 $a_1b_2\neq a_2b_1$;

(2) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$, $x=0$ 和 $y=0$.

3. 求证:

$$\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1} f(x+y)\,dxdy=\int_{-1}^{1} f(t)\,dt.$$

4. 设 D 是由曲线 $xy=1$, $xy=2$, $y=x$ 和 $y=4x$ 围成的图形在第一象限中的那一部分, 求证:

$$\iint\limits_D f(xy)\,dxdy=\log 2\int_1^2 f(t)\,dt.$$

5. 计算下列二重积分:

(1) $\iint\limits_{\pi^2\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\pi^2} \sin\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$;

(2) $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant Rx} \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dxdy$;

(3) $\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\leqslant 1\\ x\leqslant 0, y\leqslant 0}} \arctan\dfrac{y}{x}\,dxdy$;

(4) $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant x+y} \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$.

6. 计算半径为 R 的球的体积.

7. 设常数 a, $b>0$,

$$D=\left\{(x,y):\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1 \text{ 且 } x\geqslant y\geqslant 0\right\}.$$

计算二重积分

$$\iint\limits_D \sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}\,dxdy.$$

8. 计算二重反常积分

$$\iint\limits_{R^2} e^{2xy-2x^2-y^2}\,dxdy.$$

问题 16.6

1. 计算二重积分：

$$\iint_D \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{xy\,(\log^2 x + \log^2 y)},$$

其中 D 是由在第一象限里的圆周 $x^2 + y^2 = 1$ 与直线 $x + y = 1$ 所围成的图形.

2. 常数 a，b 不全为 0，求证：

$$\iint_{x^2+y^2\leqslant 1} f(ax + by + c)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - t^2} f(t\sqrt{a^2 + b^2} + c)\,\mathrm{d}t.$$

3. 设 f 是单变量函数，连续可导. 令

$$F(t) = \iint_{[0,t]^2} f(xy)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

求证：

(1) $F'(t) = \dfrac{2}{t}\left(F(t) + \displaystyle\iint_{[0,t]^2} xyf'(xy)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)$；

(2) $F'(t) = \dfrac{2}{t}\displaystyle\int_0^{t^2} f(s)\,\mathrm{d}s$.

4. 证明

$$\iint_{[0,1]^2} (xy)^{xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 t^t\mathrm{d}t.$$

§ 16.7 三 重 积 分

在前 6 节中，我们已经详细地讨论了二重积分的基本内容，并且指出，多元函数的多重积分在概念上和理论上都与二重积分的概念和理论一样.

我们是由计算体积来引入二重积分的定义的，那是一种几何的直观方法. 在介绍三重积分的时候，函数 f 是在三维欧氏空间 $\mathbf{R}^3$ 的某一个有界点集 V 上定义，它的图像存在于四维欧氏空间中，几何直观在这里已经不存在了.

我们从一个物理问题谈起，由此来引入三重积分的概念，读者马上会看到，这一概念的实质同二重积分的是一致的.

设想在 $\mathbf{R}^3$ 中的一个有界点集 V 上，分布着某种质量，一般来说，质量分布是不均匀的，所以密度是 V 上的点的函数. 用 ρ 来记这密度，$\rho: V\to\mathbf{R}$. 在

已知密度函数 ρ 之后，如何来计算 V 上的总质量？考虑 V 中一个很小的立体 U_i，它的体积记为 $\mu(U_i)$，由于想像这个立体很小，可以认为其上的密度基本上没有变化，因此，这一小块上的质量就是 $\rho(\boldsymbol{p}_i)\mu(U_i)$，其中 $\boldsymbol{p}_i$ 是 U_i 中的任意的一点．想像把 V 分成了有限多个这样的小块 U_i，它们只有公共的边界，因此就把和式

$$\sum_i \rho(\boldsymbol{p}_i)\mu(U_i) \tag{1}$$

看成 V 的质量的一个近似值．我们应当把对 V 的这种分割无限地加密，这就导致了下述的极限过程：

$$\lim \sum_i \rho(\boldsymbol{p}_i)\mu(U_i), \tag{2}$$

这个极限是对各个小块的最大直径趋于零而取的．如果这个极限存在，并且它的值不依赖于 $\boldsymbol{p}_i$ 在 U_i 上的选取，那么这个极限值就称为函数 ρ 在 V 上的**三重积分**，记作

$$\iiint\limits_V \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \quad \text{或者} \quad \int_V \rho\,\mathrm{d}\mu.$$

由此看出，三重积分的概念与二重积分的概念实质上没有任何差别，因此一些相应的名词也无需重新定义．例如说，和式(1)就可以说成是一个积分和或者 Riemann 和．

我们完全可以仿照二重积分的理论把三重积分的理论建立起来．例如说，我们首先讨论函数 f 在 $\mathbf{R}^3$ 中的一个有限长方体上的积分．$\mathbf{R}^3$ 中的一个长方体是指

$$I = I_1 \times I_2 \times I_3,$$

其中 $I_i = [a_i, b_i]$，$i = 1, 2, 3$ 是 $\mathbf{R}$ 中的有界闭区间．长方体 I 的体积定义为

$$\mu(I) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)(b_3 - a_3).$$

用平行于三个坐标平面的三组平面把 I 进行划分，得到有限多个小的长方体，它们之间至多只有公共的边界，这称为 I 的一个分割 π．给定了一个分割 π 之后，可以建立积分和．那些小长方体对角线的最大者记为 $\|\pi\|$，称之为分割 π 的宽度．我们在 $\|\pi\| \to 0$ 之下对积分和取极限，如果这个极限的存在性和数值不依赖于小长方体中值点的选择，那么这个极限值就称为 f 在 I 上的积分，记作

$$\iiint\limits_I f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \quad \text{或者} \quad \int_I f\,\mathrm{d}\mu.$$

可以证明，若 f 在 I 上可积，f 必须在 I 上有界．我们自然可以讨论 f 在长方体 I 上的可积性问题，这时需要有上和与下和的概念．上和与下和的所有性质同二重积分的情形无异．可积的必要充分条件也可以仿照 §16.2 那样来

叙述和证明．特别地，若 f 在 I 上连续，那么 f 必在 I 上可积．至于长方体上的三重积分的计算，同样可以化成累次积分来进行．所不同的是，在二重积分的情形，化为累次积分的顺序只有两种，而在三重积分的场合，这种顺序可以有 6 种．

我们也可以对三重积分建立 Lebesgue 定理．不过，这时我们要引进零测集和零体积集的概念．

点集 $B\subset\mathbf{R}^3$ 称为**零测集**(**零体积集**)，是指对任何的 $\varepsilon>0$，存在着可数(有限)个长方体 J_i，使得

$$\bigcup_i J_i \supset B \quad 并且 \quad \sum_i \mu(J_i) < \varepsilon.$$

很显然，零体积集必定是零测集．

对于长方体 I 上的有界函数 f，积分 $\int_I f\mathrm{d}\mu$ 存在的必要充分条件是 f 在 I 上的间断点集是一零测集，这就是 Lebesgue 定理．它的证法，本质上同定理 16.10 的证明没有两样．

在三重积分的情形，由长方体上的积分过渡到有界点集上的积分，完全可以按照 § 16.4 的办法来作，那里的一切定理和结论都可以照搬到此，无需作任何改变．

利用三重积分，我们可以定义 $\mathbf{R}^3$ 中有界点集 B 的体积：

$$\mu(B) = \int_B 1\mathrm{d}\mu.$$

可以证明：B 为零体积集当且只当 $\mu(B)=0$．点集 B 有体积的必要充分条件是 $\mu(\partial B)=0$．很自然地，三重积分只能在有体积的点集上进行．

现在，再讲讲有界集合上的三重积分如何化成累次积分的问题．

定理 16.23 设有界集 $V\subset\mathbf{R}^3$ 有体积，有界的函数 f: $V\to\mathbf{R}$ 连续．

1° 设 V 在 xy 平面上的垂直投影为 D (见图 16－17)，且当 $(x,y)\in D$ 时，过这一点且垂直于 D 的直线与 V 交成一个区间 $[\varphi_1(x,y),\ \varphi_2(x,y)]$，那么

$$\int_V f\mathrm{d}\mu = \iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z; \tag{3}$$

2° 设 V 在 z 轴上的垂直投影为区间 J (图 16－18)，且当 $z\in J$ 时，通过点 $(0,0,z)$ 又垂直于 z 轴的平面同 V 交成的图形在 xy 平面上的垂直投影是一有面积的点集 D_z，那么

$$\int_V f\mathrm{d}\mu = \int_J \mathrm{d}z\iint_{D_z} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{4}$$

证明 由定理 16.16 可知，f 在 V 上是可积的，作 $I=I_1\times I_2\times I_3\supset V$，其中 I_1，I_2 和 I_3 都是 $\mathbf{R}$ 中的闭区间．令

$$f_V(p)=\begin{cases}f(p), & \text{当 } p\in V \text{ 时};\\ 0, & \text{当 } p\overline{\in} V \text{ 时}.\end{cases}$$

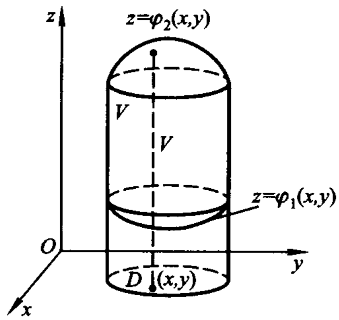


图　16-17

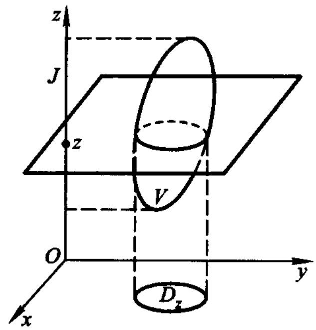


图　16-18

那么

$$\int_V f\mathrm{d}\mu=\int_I f_V\mathrm{d}\mu.$$

1°　当$(x,y)\in D$时,函数$f(x,y,\cdot)$在区间$[\varphi_1(x,y),\varphi_2(x,y)]$上连续,所以是可积的.因此

$$\int_{I_3} f_V(x,y,z)\,\mathrm{d}z=\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z,$$

而点$(x,y)\overline{\in} D$时,$f_V(x,y,z)=0$,这时$\int_{I_3} f_V(x,y,z)\,\mathrm{d}z=0$.因此

$$\begin{aligned}\int_V f\mathrm{d}\mu&=\int_I f_V\mathrm{d}\mu=\iint_{I_1\times I_2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{I_3} f_V(x,y,z)\,\mathrm{d}z\\&=\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

2°　当$z\in J$时，$D_z\subset I_1\times I_2$且$\sigma(\partial D_z)=0$；而函数$f(\cdot,\cdot,z)$在D_z上有界、连续，由定理16.16可知$f(\cdot,\cdot,z)$在D_z上可积，于是有

$$\iint_{I_1\times I_2} f_V(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_z} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

当$z\overline{\in} J$时，$f_V(x,y,z)=0$，这时

$$\iint_{I_1\times I_2} f_V(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

于是

$$\int_V f\mathrm{d}\mu=\int_I f_V\mathrm{d}\mu=\int_{I_3}\mathrm{d}z\iint_{I_1\times I_2} f_V(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_J \mathrm{d}z \iint_{D_z} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \quad \square$$

我们看一个例子.

例 1 计算积分 $A = \iiint_V \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(1+x+y+z)^3}$,其中 $V = \{(x,y,z): x,y,z \geqslant 0$ 且 $x+y+z \leqslant 1\}$.

解 这时,V 是第一卦限中的一个四面体,由三个坐标平面和平面 $x+y+z=1$ 围成(图 16 - 19).四面体 V 在 xy 平面上的垂直投影是三角形

$$D = \{(x,y): x,y \geqslant 0 \text{ 且 } x+y \leqslant 1\}.$$

当 $(x,y) \in D$ 时,$\varphi_1 = 0$,$\varphi_2 = 1-x-y$.用公式(3)计算:

$$\begin{aligned}
A &= \iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y \int_0^{1-x-y} \frac{\mathrm{d}z}{(1+x+y+z)^3} \\
&= \frac{1}{2}\iint_D \left(\frac{1}{(1+x+y)^2} - \frac{1}{4}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2}\iint_D \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(1+x+y)^2} - \frac{1}{8}\sigma(D) \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} \frac{\mathrm{d}y}{(1+x+y)^2} - \frac{1}{16} \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x - \frac{1}{16} \\
&= \frac{1}{2}\left(\log 2 - \frac{5}{8}\right).
\end{aligned}$$

我们也可以用公式(4)来计算这个积分.这时区间 $J = [0,1]$,而

$$D_z = \{(x,y): x,y \geqslant 0 \text{ 且 } x+y \leqslant 1-z\},$$

所以

$$A = \int_0^1 \mathrm{d}z \iint_{D_z} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(1+x+y+z)^3},$$

这时,当我们将上式右边的二重积分化成累次积分来计算时,那就变得同第一种算法没有两样.

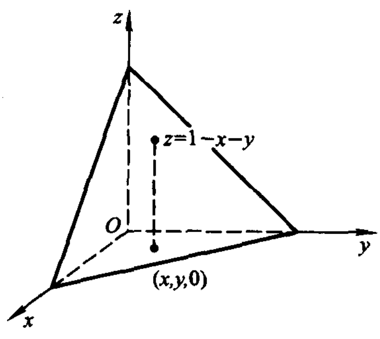


图 16 - 19

对于当前这个具体的题目,还有一种富于启发性的算法.做积分,根本的思想就是把积分域分割加细,而分割的方法则可以是各种各样的.当前的被积函数 f 有这样的性质,当表达式 $x+y+z$ 等于常数时,f 也取常数值,这就是说,平面 $x+y+z=t$ $(0 \leqslant t$

$\leqslant 1$)是函数 f 的**等值面**，这些等值面都与 V 的一个底面(即 $x+y+z=1$)平行．注意到这一特征，我们就可以用等值面族来将 V 分割．一张等值面同 V 交出一个三角形，在这个三角形上，f 有相等的函数值，因此无需将这个三角形再行分割．这就是说，我们可以把这个三重积分直接化为单积分，实际做法如下．

平面族 $x+y+z=t$，$0\leqslant t\leqslant 1$ 与 V 交成一个等边三角形，它的边长为 $\sqrt{2}t$，所以面积是 $\frac{\sqrt{3}}{2}t^2$．三角形的中心到四面体的顶点(坐标原点)的距离为 $\frac{t}{\sqrt{3}}$，因此这种分割的体积元是

$$\frac{\sqrt{3}}{2}t^2\mathrm{d}\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{2}t^2\mathrm{d}t,$$

所以

$$A=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{t^2}{(1+t)^3}\mathrm{d}t.$$

作部分分式

$$\frac{t^2}{(1+t)^3}=\frac{1}{1+t}-\frac{2}{(1+t)^2}+\frac{1}{(1+t)^3},$$

可得

$$A=\frac{1}{2}\left(\log 2-\frac{5}{8}\right).\qquad\square$$

在已经对二重积分的换元法作过详细讨论的基础上，关于三重积分的换元公式，就无需多费笔墨了，我们直接写出下列定理．

定理 16.24　设有界的闭区域 $D\subset\mathbf{R}^3$ 有体积，函数 F: $D\to\mathbf{R}$ 连续，映射

$$\boldsymbol{\varphi}:\begin{cases}x=x(u,v,w),\\ y=y(u,v,w),\quad (u,v,w)\in\Delta\\ z=z(u,v,w),\end{cases}$$

是由 Δ 到 D 上的正则映射，即 $\boldsymbol{\varphi}$ 将 Δ 一对一地映成 D，$\boldsymbol{\varphi}\in C^1(\Delta)$并且在 Δ 上

$$\det J\boldsymbol{\varphi}=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w}\\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w}\end{vmatrix}\neq 0,$$

则有

$$\int_{\boldsymbol{\varphi}(\Delta)}F\mathrm{d}\mu=\int_{\Delta}F\circ\boldsymbol{\varphi}\,|\det J\boldsymbol{\varphi}|\,\mathrm{d}\mu,\tag{5}$$

也就是

$$\iiint_D F(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\iiint_\Delta F(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w.$$

读者可自行证明这一定理，关键的一步是要首先证明 $|\det J\boldsymbol{\varphi}|$ 是映射 $\boldsymbol{\varphi}$ 对体积的伸缩比.

定理 16.24 的一个重要特例是**球坐标换元公式**. 设映射

$$\boldsymbol{\varphi}:\begin{cases}x=r\sin\theta\cos\varphi\\ y=r\sin\theta\sin\varphi,\ (r,\theta,\varphi)\in\Delta,\\ z=r\cos\theta,\end{cases}$$

这时

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)}=r^2\sin\theta,$$

那么我们有

$$\int_{\boldsymbol{\varphi}(\Delta)}F\mathrm{d}\mu=\iiint_\Delta F\circ\boldsymbol{\varphi}r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi. \tag{6}$$

例 2 计算积分

$$A=\int_D(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}\mu,$$

其中 D 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 和锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所围成的立体.

解 由于 D 是一个旋转体，见图 16－20. 用极坐标换元，由图看出 D 在 $\boldsymbol{\varphi}$ 之下的原像是长方体：

$$\Delta=\left\{(r,\theta,\varphi):\ 0\leqslant r\leqslant a,\ 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4},\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi\right\}.$$

所以

$$A=\iiint_\Delta r^4\sin\theta\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi=2\pi\int_0^a r^4\mathrm{d}r\int_0^{\pi/4}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{\pi}{5}(2-\sqrt{2})\,a^5.\quad\square$$

例 3 计算积分

$$A=\int_D z\mathrm{d}\mu,$$

其中 D 是两个球面 $x^2+y^2+z^2=2az$ 和 $x^2+y^2+z^2=az$ 之间的点集，见图 16－21.

解 经过配方，把这两个球的方程改写为

$$x^2+y^2+(z-a)^2=a^2,$$

$$x^2+y^2+\left(z-\frac{a}{2}\right)^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2,$$

由此容易得出它们的中心和半径.

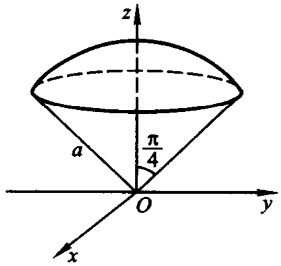


图　16-20

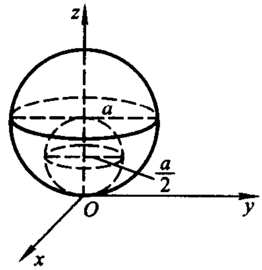


图　16-21

用极坐标换元，易见 θ 和 φ 的变化范围分别是$\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$和$[0,2\pi]$. 过坐标原点、在上半空间中作一条射线，这条射线将同两个球面相交，只要 $\theta\neq\frac{\pi}{2}$，交点有两个，它们到原点的距离分别是 $a\cos\theta$ 和 $2a\cos\theta$. 这就是说，对任意固定的 $\theta\in\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$，$r$ 的变化范围是$[a\cos\theta,2a\cos\theta]$. 这样，我们就定出了参数变化的域 Δ. 于是

$$\begin{aligned}A&=\iiint_{\Delta}r^3\cos\theta\sin\theta\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\\&=2\pi\int_0^{\pi/2}\cos\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\int_{a\cos\theta}^{2a\cos\theta}r^3\mathrm{d}r\\&=\frac{15}{2}\pi a^4\int_0^{\pi/2}\cos^5\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{5}{4}\pi a^4.\end{aligned}$$

对本题来说，通过仔细的观察，利用灵活的技巧，不用换元就能很快地把结果得出来. 如果用 D_1 和 D_2 分别表示小球体和大球体，那么 $D=D_2\setminus D_1$，于是

$$\int_D z\mathrm{d}\mu=\int_{D_2}z\mathrm{d}\mu-\int_{D_1}z\mathrm{d}\mu,$$

但是

$$\int_{D_2}z\mathrm{d}\mu=\int_{D_2}(z-a)\,\mathrm{d}\mu+\int_{D_2}a\mathrm{d}\mu=a\mu(D_2),$$

这是因为大球关于平面 $z=a$ 是对称的，所以上式右边的第一个积分等于零. 同理

$$\int_{D_1} z\mathrm{d}\mu = \int_{D_1}\left(z - \frac{a}{2}\right)\mathrm{d}\mu + \frac{a}{2}\int_{D_1}\mathrm{d}\mu = \frac{a}{2}\mu(D_1),$$

这样，我们得出

$$\int_D z\mathrm{d}\mu = a\mu(D_2) - \frac{a}{2}\mu(D_1) = \frac{4}{3}\pi a^4\left(1 - \frac{1}{16}\right) = \frac{5}{4}\pi a^4. \quad \square$$

练习题 16.7

1. 计算下列积分：

(1) $\int_V xyz\mathrm{d}\mu$, V 为球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1$ 在第一卦限中的部分；

(2) $\int_V (x + y + z)\mathrm{d}\mu$, V 为平面 $x + y + z = 1$ 和三个坐标平面所围成的立体；

(3) $\int_V z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, V 由 $z = xy$ 和 $z = 0$ 以及以下四张平面 $x = -1, x = 1, y = 2$, $y = 3$ 所围成；

(4) $\int_V xy^2z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, V 由 $z = xy$ 和 $z = 0$ 以及两张平面 $x = 1$ 和 $x = y$ 围成.

2. 计算下列曲面围成的立体的体积：

(1) $z^2 = x^2 + \frac{y^2}{4}$, $2z = x^2 + \frac{y^2}{2}$;

(2) $x^2 + z^2 = a^2$, $|x| + |y| = a$.

3. 设函数 f 连续，证明：

$$\int_a^b \mathrm{d}x\int_a^x \mathrm{d}y\int_a^y f(x,y,z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b \mathrm{d}z\int_z^b \mathrm{d}y\int_y^b f(x,y,z)\,\mathrm{d}x.$$

4. 设函数 f 连续，证明：

$$\int_0^a \mathrm{d}x\int_0^x \mathrm{d}y\int_0^y f(x)f(y)f(z)\,\mathrm{d}z = \frac{1}{3!}\left(\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t\right)^3.$$

5. 设函数 f 连续，证明：

$$\int_0^a \mathrm{d}x\int_0^x \mathrm{d}y\int_0^y f(z)\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\int_0^a (a - t)^2 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

6. 设 f 为连续函数. 求极限：

$$\lim_{r\to 0}\frac{3}{4\pi r^3}\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant r^2} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

7. 计算下列积分：

(1) $\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 2} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$;

(2) $\iiint\limits_{D} (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,

其中 $D=\{(x,y,z):z\geqslant 0, a^2\leqslant x^2+y^2+z^2\leqslant b^2\}$;

(3) $\iiint\limits_{D} \left(1-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\right)^{1/2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,

其中 D 为椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 包围的立体.

8. 计算由下列曲面围成的立体的体积：

(1) $a_ix+b_iy+c_iz=\pm h_i\ (i=1,2,3)$,

设行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0;$$

(2) $x^2+y^2+z^2=a^2$，$x^2+y^2+z^2=b^2$ ($0\leqslant a\leqslant b$ 且 $z>0$);

(3) $(x^2+y^2+z^2)^2=a^3z$，常数 $a>0$;

(4) $(x^2+y^2+z^2)^n=z^{2n-1}\quad(n\in\mathbf{N}_+)$;

(5) $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$.

问题 16.7

1. 令

$$F(t)=\iiint\limits_{[0,t]^3} f(xyz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

其中单变量函数 f 连续可导，求证：

$$F'(t)=\frac{3}{t}\left(F(t)+\iiint\limits_{[0,t]^3} xyzf'(xyz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\right).$$

2. 设 f 为连续函数，令

$$F(t)=\iiint\limits_{[0,t]^3} f(xyz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

求证：

$$F'(t)=\frac{3}{t}\int_0^{t^3}\frac{g(u)}{u}\mathrm{d}u,$$

其中 $g(u)=\int_0^u f(s)\,\mathrm{d}s$.

§ 16.8 n 重积分

有了二重和三重积分之后，用同样的方法，可以把 n 重积分建立起来.

首先讨论函数 f 在 $\mathbf{R}^n$ 中一个有限长方体上的积分. $\mathbf{R}^n$ 中的一个闭长方体是指

$$I=I_1\times I_2\times\cdots\times I_n,$$

其中 $I_i=[a_i,b_i]$, $i=1, 2, \cdots, n$，是数轴上的闭区间. I 的 **n 维体积**定义为

$$\mu(I)=\prod_{i=1}^{n}(b_i-a_i),$$

在不致引起混淆的情况下，“n 维”的字眼可以略去.

用平行于各坐标轴平面的 n 组超平面把 I 进行分割，得到有限多个子长方体，它们至多只有公共的边界，这样就得到了 I 的一个分割 π. 那些子长方体“对角线”的长度的最大者，记为 $\|\pi\|$，称为分割 π 的宽度. 对于定义在 I 上的(n 元)函数 f，对分割 π 做积分和. 在条件 $\|\pi\|\to 0$ 之下对积分和取极限. 如果这个极限的存在性和数值不依赖于子长方体中值点的选择，那么这个极限值就称为 f 在 I 上的积分，记作

$$\iint\limits_I\cdots\int f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n,$$

也记为

$$\int_I f\mathrm{d}\mu,$$

这时称 f 在 I 上**可积**. 可以证明，若 f 在 I 上可积，那么 f 必在 I 上有界. 为了讨论函数 f 在 I 上的可积性，需要引进上和与下和的概念. 上和与下和的所有性质，同二重积分的情形无异. 可积性的必要充分条件也可以仿照 § 16.2 中那些来叙述和证明. 特别地，若 f 在 I 上连续，那么 f 必然在 I 上可积. I 上 n 重积分的计算，也可以化为累次积分来进行，这时共有 $n!$ 种不同的顺序.

怎样由 n 维长方体上的积分过渡到 $\mathbf{R}^n$ 中有界集合上的积分，参看 § 16.4 的讨论就一目了然，其中的许多步骤和细节，在此就不赘述了.

为了对 n 重积分证明 Lebesgue 定理，我们要引进零测集和零体积集的概念. 取被积函数为 1，通过积分来定义一个有界点集的体积. 可以证明：一个

有界点集有体积的必要充分条件是：它的边界为一零体积集.

类似于定理 16.24，n 重积分也可化为一个 $n-1$ 重积分和一个定积分来计算.

定理 16.25 设有界集 $V\subset\mathbf{R}^n$ 有体积，有界函数 $f: V\to\mathbf{R}$ 连续.

1° 如果

$$V=\{x=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n:\ \text{当}(x_1,\cdots,x_{n-1})\in D\subset\mathbf{R}^{n-1}\text{时},$$
$$\varphi_1(x_1,\cdots,x_{n-1})\leqslant x_n\leqslant\varphi_2(x_1,\cdots,x_{n-1})\},$$

其中 φ_1，φ_2 是 D 中的连续函数，那么

$$\int_V f\mathrm{d}\mu=\int\cdots\int_D\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_{n-1}\int_{\varphi_1(x_1,\cdots,x_{n-1})}^{\varphi_2(x_1,\cdots,x_{n-1})}f(x_1,\cdots,x_{n-1},x_n)\,\mathrm{d}x_n.$$

2° 如果

$$V=\{x=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n:\text{当 }x_n\in[a,b]\text{时},(x_1,\cdots,x_{n-1})\in D_{x_n}\subset\mathbf{R}^{n-1}\},$$

那么

$$\int_V f\mathrm{d}\mu=\int_a^b\mathrm{d}x_n\int\cdots\int_{D_{x_n}}f(x_1,\cdots,x_{n-1},x_n)\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_{n-1}.$$

3° 当然，也可把 n 重积分化成一个 k $(1\leqslant k\leqslant n)$重积分和一个 $n-k$ 重积分来计算. 这就是说，

$$V=\{x=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n:\ (x_{k+1},\cdots,x_n)\in D_1\subset\mathbf{R}^{n-k},$$
$$(x_1,\cdots,x_k)\in D_2\subset\mathbf{R}^k\}\ ,$$

那么

$$\int_V f\mathrm{d}\mu=\overbrace{\int\cdots\int_{D_1}}^{n-k}\mathrm{d}x_{k+1}\cdots\mathrm{d}x_n\overbrace{\int\cdots\int_{D_2}}^{k}f(x_1,\cdots,x_n)\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_k.$$

n 重积分也有换元公式，从形式上看，它和二、三重积分的换元公式没有区别.

定理 16.26 设 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 的开集，$\Delta\subset\Omega$ 有体积. 设映射 $\boldsymbol{\varphi}$: $x_i=x_i(u_1,\cdots,u_n)(i=1,\cdots,n)$在 Δ 上是正则的，那么对于 $\boldsymbol{\varphi}(\Delta)$上的连续函数 F，有

$$\int\cdots\int_{\boldsymbol{\varphi}(\Delta)}F(x_1,\cdots,x_n)\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n$$
$$=\int\cdots\int_{\Delta}F(x_1(u_1,\cdots,u_n),\cdots,x_n(u_1,\cdots,u_n))\left|\frac{\partial(x_1,\cdots,x_n)}{\partial(u_1,\cdots,u_n)}\right|\mathrm{d}u_1\cdots\mathrm{d}u_n.$$

下面，我们举两个例子，说明 n 重积分的几何应用.

在 n 维欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 中，点集

$$S_n(a)=\{(x_1,\cdots,x_n):\ x_1,\ \cdots,\ x_n\geqslant 0\text{ 且 }x_1+\cdots+x_n\leqslant a\}$$

称为一个 **n 维单形**，这里 $a>0$. 例如说，$S_1(a)$就是数轴上的闭区间$[0,a]$，

二维单形 $S_2(a)$就是 xy 平面上的一个三角形，它的三个顶点是(0,0)，(a，0)，(0，a)．三维单形 $S_3(a)$则是三维欧氏空间中位于第一卦限的一个四面体，它的四个顶点是

$$(0,0,0),\ (a,0,0),\quad (0,a,0),\quad (0,0,a).$$

例 1　n 维单形的体积

用 $\mu(S_n(a))$来表示单形 $S_n(a)$的体积，根据我们的经验，应当如此定义

$$\mu(S_n(a)) = \int\limits_{S_n(a)} \mathrm{d}\mu, \tag{1}$$

上式的右边就是常数 1 在单形 $S_n(a)$上的 n 重积分．作换元

$$x_i = at_i,\qquad i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n.$$

这个换元的几何意义是：在每个坐标轴的方向上伸缩同一个常数 a，由此 n 维体积的伸缩比是

$$\frac{\partial(x_1,\cdots,x_n)}{\partial(t_1,\cdots,t_n)} = a^n.$$

在(1)式的右边作这种换元，得到

$$\mu(S_n(a)) = a^n \int\limits_{S_n(1)} \mathrm{d}\mu,$$

这也就是

$$\mu(S_n(a)) = a^n\mu(S_n(1)). \tag{2}$$

另一方面，将 n 重积分化累次积分，得到

$$\mu(S_n(1)) = \int\limits_{S_n(1)} \mathrm{d}\mu = \int_0^1 \mathrm{d}t \int\limits_{K_{n-1}}\cdots\int \mathrm{d}t_1\cdots\mathrm{d}t_{n-1}, \tag{3}$$

其中 $K_{n-1} = S_{n-1}(1-t)$，因此

$$\begin{aligned}\int\limits_{K_{n-1}}\cdots\int \mathrm{d}t_1\cdots\mathrm{d}t_{n-1} &= \mu(K_{n-1}) = \mu(S_{n-1}(1-t))\\ &= (1-t)^{n-1}\mu(S_{n-1}(1)),\end{aligned}$$

代入(3)便得出

$$\mu(S_n(1)) = \mu(S_{n-1}(1))\int_0^1 (1-t)^{n-1}\mathrm{d}t,$$

即

$$\mu(S_n(1)) = \frac{1}{n}\mu(S_{n-1}(1)),$$

这是一个关于 $S_n(1)$的体积的递推公式，由于

$$\mu(S_1(1)) = \int_0^1 \mathrm{d}t = 1,$$

可以求得

$$\mu(S_n(1))=\frac{1}{n!}(n\in\mathbf{N}_+),$$

一般地，对 $a>0$，由(2)得出

$$\mu(S_n(a))=\frac{a^n}{n!}(n\in\mathbf{N}_+).\quad\square$$

再设

$$B_n(a)=\{(x_1,\cdots,x_n):\ x_1^2+\cdots+x_n^2\leqslant a^2\},$$

称之为以原点为中心、a 为半径的 **n 维球体**. 当 $n=1$ 时，$B_1(a)$是数轴上的闭区间$[-a,a]$. 当 $n=2$ 时，$B_2(a)$是平面上以原点为中心、以 a 为半径的闭圆盘. 而当 $n=3$ 时，$B_3(a)$正是以原点为中心、以 a 为半径的闭球体.

例2　n 维球的体积

通过 n 重积分，我们定义 $B_n(a)$的体积是

$$\mu(B_n(a))=\int\limits_{B_n(a)}\mathrm{d}\mu.\tag{4}$$

和前面的例子一样，通过同样的换元，可得

$$\mu(B_n(a))=a^n\mu(B_n(1)).\tag{5}$$

为了得到计算 $\mu(B_n(1))$的递推公式，我们把这个 n 重积分化成一个 $n-2$ 重积分和一个二重积分来计算：

$$\mu(B_n(1))=\int\limits_{B_n(1)}\mathrm{d}\mu=\iint\limits_{t_{n-1}^2+t_n^2\leqslant 1}\mathrm{d}t_{n-1}\mathrm{d}t_n\int\cdots\int\limits_{K_{n-2}}\mathrm{d}t_1\cdots\mathrm{d}t_{n-2},\tag{6}$$

这里 $K_{n-2}=B_{n-2}\left(\sqrt{1-t_{n-1}^2-t_n^2}\right)$. 由公式

$$\begin{aligned}\mu(K_{n-2})&=\mu\left(B_{n-2}\left(\sqrt{1-t_{n-2}^2-t_n^2}\right)\right)\\&=(1-t_{n-1}^2-t_n^2)^{(n-2)/2}\mu(B_{n-2}(1)),\end{aligned}$$

于是(6)可写成

$$\mu(B_n(1))=\mu(B_{n-2}(1))\iint\limits_{t_{n-1}^2+t_n^2\leqslant 1}(1-t_{n-1}^2-t_n^2)^{(n-2)/2}\mathrm{d}t_{n-1}\mathrm{d}t_n.\tag{7}$$

简记 $t_{n-1}=u$，$t_n=v$，并用极坐标，即得

$$\iint\limits_{u^2+v^2\leqslant 1}(1-u^2-v^2)^{(n-2)/2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1(1-r^2)^{(n-2)/2}r\mathrm{d}r=\frac{2\pi}{n},$$

代入(7)，即得递推公式

$$\mu(B_n(1))=\frac{2\pi}{n}\mu(B_{n-2}(1)).$$

已知

$$\mu(B_2(1))=\pi,\ \mu(B_1(1))=2,$$

所以

$$\mu(B_{2k}(1))=\frac{\pi^k}{k!},\ \mu(B_{2k-1}(1))=\frac{2^k\pi^{k-1}}{(2k-1)!!}.$$

再由(5)即知，对任意自然数 $k=1,2,\cdots$，有

$$\mu(B_{2k}(a))=\frac{\pi^k}{k!}a^{2k},\ \mu(B_{2k-1}(a))=\frac{2^k\pi^{k-1}}{(2k-1)!!}a^{2k-1}.\qquad \square$$

在第 20 章中将用 Γ 函数给出球体积的统一表达式.

最后，我们来介绍 n 维球坐标变换.

$$\begin{cases} x_1=r\cos\theta_1, \\ x_2=r\sin\theta_1\cos\theta_2, \\ x_3=r\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3, \\ \quad\cdots\cdots \\ x_{n-1}=r\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1}, \\ x_n=r\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1}, \end{cases}\tag{8}$$

称为 **n 维球坐标变换**，它把闭 n 维长方体

$$0\leqslant r\leqslant a,\quad 0\leqslant\theta_1,\ \cdots,\ \theta_{n-2}\leqslant\pi,\quad 0\leqslant\theta_{n-1}\leqslant 2\pi,$$

映为闭球 $\overline{B}_n(a)$:

$$x_1^2+\cdots+x_n^2\leqslant a^2,$$

且在长方体的内部，这个变换是一一的. 在用球坐标计算 n 重积分时，我们需要知道这个变换的 Jacobian 行列式$\dfrac{\partial(x_1,\cdots,x_n)}{\partial(r,\theta_1,\cdots,\theta_{n-1})}$. 直接通过变换(8)来计算这个 n 阶行列式是非常困难的. 下面我们用隐映射定理(定理 14.12)来计算这个行列式. 让我们回忆一下，如果函数组 $x_i=x_i(u_1,\cdots,u_n)$，$i=1,2,\cdots,n$ 满足方程组

$$\begin{cases} F_1(x_1,\cdots,x_n,u_1,\cdots,u_n)=0, \\ \quad\cdots\cdots \\ F_n(x_1,\cdots,x_n,u_1,\cdots,u_n)=0, \end{cases}$$

那么

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial u_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_1}{\partial u_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial x_n}{\partial u_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_n}{\partial u_n} \end{pmatrix}=-(J_x\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}))^{-1}J_u\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}),$$

两边取行列式，即得

$$\frac{\partial(x_1,\cdots,x_n)}{\partial(u_1,\cdots,u_n)} = (-1)^n \frac{\det J_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})}{\det J_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})}, \tag{9}$$

现在令

$$\begin{cases} F_1 = r^2 - (x_1^2 + \cdots + x_n^2) = 0, \\ F_2 = r^2\sin^2\theta_1 - (x_2^2 + \cdots + x_n^2) = 0, \\ F_3 = r^2\sin^2\theta_1\sin^2\theta_2 - (x_3^2 + \cdots + x_n^2) = 0, \\ \quad\cdots\cdots \\ F_n = r^2\sin^2\theta_1\cdots\sin^2\theta_{n-1} - x_n^2 = 0, \end{cases} \tag{10}$$

这里的 r，θ_1，θ_2，…，θ_{n-1}相当于上面提到的 u_1，…，u_n. 容易看出，方程组(8)所确定的函数 x_1，…，x_n 满足方程组(10)，因而所需的行列式可以通过公式(9)来计算. 由于

$J_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) =$

$$\begin{pmatrix} 2r & & & & \\ 2r\sin^2\theta_1 & 2r^2\sin\theta_1\cos\theta_1 & & & \\ * & * & 2r^2\sin^2\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_2 & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ * & * & * & \cdots & 2r^2\sin^2\theta_1\cdots\sin^2\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1}\cos\theta_{n-1} \end{pmatrix},$$

所以

$$\det J_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) = 2^n r^{2n-1}\sin^{2n-3}\theta_1\cos\theta_1\sin^{2n-5}\theta_2\cos\theta_2 \cdots\sin\theta_{n-1}\cos\theta_{n-1}.$$

因为

$$J_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) = \begin{pmatrix} -2x_1 & * & * & \cdots & * \\ & -2x_2 & * & \cdots & * \\ & & -2x_3 & \cdots & * \\ & & & \cdots & \cdots \\ & & & & -2x_n \end{pmatrix},$$

所以

$$\begin{aligned} &\det J_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) \\ &= (-1)^n 2^n x_1\cdots x_n \\ &= (-1)^n 2^n r^n \sin^{n-1}\theta_1\cos\theta_1\sin^{n-2}\theta_2\cos\theta_2\cdots\sin\theta_{n-1}\cos\theta_{n-1}, \end{aligned}$$

代入(9)即得

$$\frac{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\partial(r,\theta_1,\cdots,\theta_{n-1})} = r^{n-1}\sin^{n-2}\theta_1\sin^{n-3}\theta_2\cdots\sin\theta_{n-2}. \tag{11}$$

例 3 设 f 是一个单变量函数，计算积分

$$A=\int\cdots\int_{B_n(a)} f(\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2})\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n.$$

解 用球坐标变换，立刻可得

$$A=\int_0^a r^{n-1}f(r)\,\mathrm{d}r\int_{E_n}\sin^{n-2}\theta_1\sin^{n-3}\theta_2\cdots\sin\theta_{n-2}\mathrm{d}\theta_1\cdots\mathrm{d}\theta_{n-1},$$

这里

$$E_n=\{(\theta_1,\cdots,\theta_{n-1}):\ 0\leqslant\theta_1,\ \cdots,\ \theta_{n-2}\leqslant\pi,\ 0\leqslant\theta_{n-1}\leqslant 2\pi\},$$

为了计算积分

$$I=\int_{E_n}\sin^{n-2}\theta_1\sin^{n-3}\theta_2\cdots\sin\theta_{n-2}\mathrm{d}\theta_1\cdots\mathrm{d}\theta_{n-1},$$

把等式 $1=n\int_0^1 r^{n-1}\mathrm{d}r$ 乘上式两端，并注意到(见公式(11))

$$r^{n-1}\sin^{n-2}\theta_1\sin^{n-3}\theta_2\cdots\sin\theta_{n-2}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta_1\cdots\mathrm{d}\theta_{n-1}$$

是 n 维球的体积元，即得

$$\begin{aligned}I&=n\int_0^1 r^{n-1}\mathrm{d}r\int_{E_n}\sin^{n-2}\theta_1\sin^{n-3}\theta_2\cdots\sin\theta_{n-2}\mathrm{d}\theta_1\cdots\mathrm{d}\theta_{n-1}\\&=n\mu(B_n(1)).\end{aligned}$$

例 2 中已经算得

$$\mu(B_{2k}(1))=\frac{\pi^k}{k!},\quad \mu(B_{2k-1}(1))=\frac{2^k\pi^{k-1}}{(2k-1)!!}.$$

所以最后得到

$$A=\begin{cases}\dfrac{2\pi^k}{(k-1)!}\displaystyle\int_0^a r^{2k-1}f(r)\,\mathrm{d}r, & n=2k;\\ \dfrac{2^k\pi^{k-1}}{(2k-3)!!}\displaystyle\int_0^a r^{2k-2}f(r)\,\mathrm{d}r, & n=2k-1.\end{cases}$$

练习题 16.8

1. 计算下列 n 重积分：

(1) $\displaystyle\int\cdots\int_{[0,1]^n}(x_1^2+\cdots+x_n^2)\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n$;

(2) $\displaystyle\int\cdots\int_{[0,1]^n}(x_1+\cdots+x_n)^2\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n$.

2. 计算累次积分：

$$\int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \cdots \int_0^{x_{n-1}} x_1 \cdots x_{n-1} x_n dx_n .$$

3. 计算下列 $\mathbf{R}^n$ 中的集合的体积(其中 $a_1, a_2, \cdots, a_n > 0$):

(1) $V_n = \left\{(x_1, \cdots, x_n) : \dfrac{x_1}{a_1} + \cdots + \dfrac{x_n}{a_n} \leqslant 1, x_1, \cdots, x_n \geqslant 0\right\}$;

(2) $V_n(a) = \{(x_1, \cdots, x_n) : |x_1| + \cdots + |x_n| \leqslant a\}$.

4. 设 K 为二元连续函数,对 $n \in \mathbf{N}_+$,令

$K_n(x, y) = \underset{[a,b]^n}{\int \cdots \int} K(x, t_1) K(t_1, t_2) \cdots K(t_n, y) dt_1 \cdots dt_n$,

求证:对任何 $m, n \in \mathbf{N}_+$,有

$$K_{m+n+1}(x, y) = \int_a^b K_m(x, t) K_n(t, y) dt .$$

问题 16.8

1. 设 f 是单变量连续函数,证明:

$$\int_0^a dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \cdots \int_0^{x_{n-1}} f(x_n) dx_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^a f(t)(a-t)^{n-1} dt .$$

2. 设 f 是单变量连续函数, 证明:

$$\int_0^a dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \cdots \int_0^{x_{n-1}} f(x_1) f(x_2) \cdots f(x_n) dx_n = \frac{1}{n!}\left(\int_0^a f(t) dt\right)^n .$$

3. 设 f 为 n 元连续函数, 证明:

$$\int_a^b dx_1 \int_a^{x_1} dx_2 \cdots \int_a^{x_{n-1}} f(x_1, x_2, \cdots, x_n) dx_n$$

$$= \int_a^b dx_n \int_{x_n}^b dx_{n-1} \cdots \int_{x_2}^b f(x_1, x_2, \cdots, x_n) dx_1 .$$

4. 设 $\boldsymbol{x}'A\boldsymbol{x}$ 为一 n 元正定二次型, 计算反常 n 重积分

$$\underset{\mathbf{R}^n}{\int \cdots \int} e^{-\boldsymbol{x}'A\boldsymbol{x}} dx_1 \cdots dx_n .$$

(本题只要求学完《线性代数》的学生完成.)

5. 设 a_1, $\cdots$, $a_n > 0$,

$$V_n = \left\{(x_1, \cdots, x_n) :\ \frac{|x_i|}{a_i} + \frac{|x_n|}{a_n} \leqslant 1,\ i = 1, 2, \cdots, n-1\right\},$$

求 V_n 的体积.

§ 16.9 重积分物理应用举例

通过以下几个例题，来说明重积分在物理学中的应用.

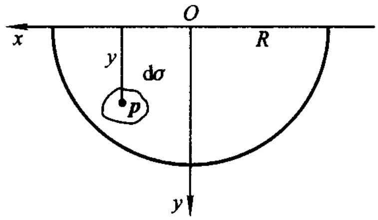


图 16-22

例 1 一条横截面为半圆形的水渠，求水满时水闸门承受的压力.

解 设水闸门是半径为 R (m)的半圆盘，按图 16-22 建立平面直角坐标系，使得原点与圆心重合，纵轴指向水底. 因为在一点 p 处水的压强等于该点水的深度 y ($\mathrm{t/m^2}$)，当我们围绕点 p 取一面积元素 $\mathrm{d}\sigma$ 时，这一小块上的水的压力是 $y\mathrm{d}\sigma$，"相加之后"——严格地说应是做积分之后，得到水闸门所承受的总压力

$$\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\leqslant R^2\\ y\geqslant 0}} y\mathrm{d}\sigma = \int_0^R r^2\mathrm{d}r\int_0^\pi \sin\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{2}{3}R^3\ (\mathrm{t}). \quad \square$$

例 2 设在半径为 R 的球上分布着某种物质，其密度函数 $\rho(\boldsymbol{p}) = a\,\|\boldsymbol{p}\|$，其中 $a>0$ 为常数. 计算球的质量.

解 在球上任取一点 $\boldsymbol{p}$，环绕 $\boldsymbol{p}$ 取一个微小的体积元素 $\mathrm{d}\mu$，因此这一小块的质量就是 $\rho(\boldsymbol{p})\mathrm{d}\mu = a\,\|\boldsymbol{p}\|\,\mathrm{d}\mu$，相加便得总的质量

$$\begin{aligned} m &= \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant R^2} a\,\|\boldsymbol{p}\|\,\mathrm{d}\mu = a\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant R^2}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}\mu \\ &= a\int_0^R r^3\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^\pi \sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi \\ &= a\pi R^4. \quad \square \end{aligned}$$

现在，我们介绍质心的计算公式. 设想在位置 $\boldsymbol{p}_1$，$\boldsymbol{p}_2$，…，$\boldsymbol{p}_n$ 处，分别安放着质量 m_1，m_2，…，m_n，形成一个由 n 个质点构成的**质点组**. 这个质点组的**质心**定义为

$$\boldsymbol{P} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^n m_i\boldsymbol{p}_i, \tag{1}$$

其中 $M = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$，表示质点组的总的质量. 公式(1)也可以写成

$$\boldsymbol{P} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{m_i}{M}\right)\boldsymbol{p}_i, \tag{2}$$

这说明质心正是各质点的位置关于质量的加权平均，点 $\boldsymbol{p}_i$ 处的权是 $\frac{m_i}{M}$，$i = 1,2,$

$\cdots, n$.

现在,我们考虑质量连续地分布于一个体 V 上,设密度函数为 $\rho(\boldsymbol{p})$,$\boldsymbol{p} \in V$,在 V 中的点$\boldsymbol{p}$ 处,取一小块体积元素 $\mathrm{d}\mu$,它的质量便是 $\rho(\boldsymbol{p})\,\mathrm{d}\mu$,仿照(1)式,定义物体的质心为

$$\boldsymbol{P} = \frac{1}{M}\int_V \boldsymbol{p}\rho(\boldsymbol{p})\,\mathrm{d}\mu, \tag{3}$$

其中

$$M = \int_V \rho\,\mathrm{d}\mu \tag{4}$$

表示分布在 V 上的总的质量. 如果设 $\boldsymbol{P} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, 将(3)的右边用分量写出来, 便有

$$\begin{cases} \bar{x} = \dfrac{1}{M}\displaystyle\int_V x\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}\mu, \\ \bar{y} = \dfrac{1}{M}\displaystyle\int_V y\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}\mu, \\ \bar{z} = \dfrac{1}{M}\displaystyle\int_V z\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}\mu, \end{cases} \tag{5}$$

式中的 M 由(4)式给出.

例 3 设有半径为 a 的球, 球心是$(0,0,a)$, 密度函数是 $\rho(\boldsymbol{p}) = \dfrac{k}{r^2}$, 其中 k 为常数, $r = \|\boldsymbol{p}\|$, 试计算球的质心.

解 由对称性可知质心在 z 轴上, 因此可设质心 $\boldsymbol{P} = (0,0,\bar{z})$. 利用公式(5)的最后一个等式, 知

$$\bar{z} = \frac{1}{M}\int_V \frac{k}{r^2} z\,\mathrm{d}\mu.$$

利用球坐标换元, 得出

$$\begin{aligned} M &= k\int_V \frac{1}{r^2}\mathrm{d}\mu = k\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi/2}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\cos\theta}\mathrm{d}r \\ &= 4ak\pi\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = 2ak\pi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_V \frac{k}{r^2} z\,\mathrm{d}\mu &= 2k\pi\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\cos\theta} r\,\mathrm{d}r \\ &= 4a^2k\pi\int_0^{\pi/2}\cos^3\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = ka^2\pi. \end{aligned}$$

所以 $\bar{z} = \dfrac{a}{2}$, 从而质心是$\left(0,\ 0,\ \dfrac{a}{2}\right)$. □

下面给出最后一个例子.

例 4 设有半径为 R 的球，密度为常数——不妨设 $\rho=1$，试求出其引力场.

解 为求引力场，在空间中任取一点 p，我们要计算在点 p 处单位质量所受到的引力. 这里所说的引力，应当是一个向量. 取球心为原点，建立坐标系. 由于球的对称性，不妨设 p 在 z 轴上，即设 $p=(0,0,l)$，其中 $l>0$，它正是点 p 到球心的距离.

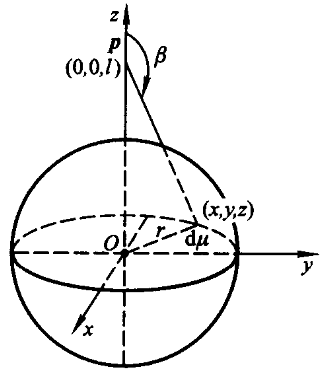


图 16-23

在球中任取一点 (x,y,z)，环绕着它取一块体积元素 $d\mu$，则这一小块对点 p 的引力的数值为

$$\frac{d\mu}{x^2+y^2+(z-l)^2},$$

方向是从点 p 指向点 (x,y,z)，这个方向同 z 轴正向的夹角用 β 来记(见图 16-23)，因此引力在 z 轴上的分量为

$$\frac{\cos\beta\, d\mu}{x^2+y^2+(z-l)^2}.$$

我们有

$$\cos\beta=\frac{z-l}{\sqrt{x^2+y^2+(z-l)^2}},$$

若用 F_z 表示引力 $\boldsymbol{F}$ 在 z 轴上的分量，则

$$F_z=\int\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant R^2}\frac{z-l}{(x^2+y^2+(z-l)^2)^{3/2}}d\mu.$$

作球坐标换元，得出

$$F_z=2\pi\int_0^R dr\int_0^\pi\frac{r^2(r\cos\theta-l)\sin\theta}{(r^2+l^2-2lr\cos\theta)^{3/2}}d\theta.$$

现在，应当算出定积分

$$G(r)=\int_0^\pi\frac{(r\cos\theta-l)\sin\theta}{(r^2+l^2-2lr\cos\theta)^{3/2}}d\theta,$$

对上述积分作换元 $t=(r^2+l^2-2lr\cos\theta)^{1/2}$，得到

$$G(r)=\frac{1}{2l^2r}\int_{|r-l|}^{r+l}\left(\frac{r^2-l^2}{t^2}-1\right)dt=\frac{1}{l^2}\left(\frac{r-l}{|r-l|}-1\right),$$

可见

$$G(r)=\begin{cases}0, & r>l,\\ -\dfrac{2}{l^2}, & r<l.\end{cases}$$

因此，当 $l > R$ 时，必有 $r < l$，所以

$$F_z = 2\pi\int_0^R r^2 G(r)\,\mathrm{d}r = -\frac{4\pi}{l^2}\int_0^R r^2\mathrm{d}r = -\frac{4\pi R^3}{3l^2};$$

当 $l \leqslant R$ 时

$$F_z = 2\pi\int_0^l r^2 G(r)\,\mathrm{d}r = -\frac{4\pi}{l^2}\int_0^l r^2\mathrm{d}r = -\frac{4}{3}\pi l.$$

由球的对称性和质量分布的均匀性,可知对点 p 的引力在 x 轴和 y 轴方向的分量等于零,即 $F_x = F_y = 0$,而

$$F_z = \begin{cases} -\dfrac{4\pi R^3}{3l^2}, & \text{当 } l > R \text{ 时}, \\ -\dfrac{4}{3}\pi l, & \text{当 } l \leqslant R \text{ 时}. \end{cases}$$

综合以上结果,可以得出以下的结论:

1° 对任何一点所产生的引力指向球心;

2° 对球外一点所产生的引力,等于在球心上放置一个质量为 $\dfrac{4}{3}\pi R^3$ 的质点对该点所产生的引力,即犹如球的质量全部集中在球心上;

3° 对球内一点 p 所产生的引力,等于半径为 l(点 p 到球心的距离)的球体对点 p 所产生的引力,犹如球面上一切点若它们到球心的距离大于点 p 到球心的距离时,它们对 p 点的引力不作贡献. □

通过以上4个例子,读者应当学会物理学家心目中产生积分的方法——“微元法”,那就是先取一个很小的面积元素或体积元素,再乘以相应的数或者量,然后求和便得到了积分. 在这里,并不是像数学家那样来思考,对一个分割,作成 Riemann 和,然后考虑 $\|\pi\| \to 0$ 时积分和的极限,还要论证这个极限的存在和数值不依赖于值点的选取. 这是因为许多物理问题中所涉及的函数和映射,都具有连续的性质,积分的存在就是确定无疑的,因此微元法的合理性是有保证的.

练习题　16.9

1. 将一空心球体压入水中，试计算所作之功.
2. 半径为 R 的均匀圆盘，其密度为 μ. 过圆心且与圆垂直的直线上有一密度为 ρ 的均匀细棒，棒长为 l，其近圆盘的一端与圆心相距为 a. 求圆盘对细棒的引力.
3. 一圆锥与半球相接构成密度为 ρ 的均匀球锥，球半径为 R，圆锥顶角为 2α. 试计算球锥对其顶点的引力.

4. 半径为 a 的圆盘，其各点的密度等于该点到圆心的距离．今从圆盘上挖去一个半径为 $\frac{a}{2}$ 的同心小圆盘，试求重心坐标．
5. 半径为 a 的均匀圆柱体上接一半径为 a 的均匀半球，圆柱密度为 λ，半球密度为 μ．为使重心恰好在球心上，柱高为何？
6. 证明凸形物体的重心在其体内．
(提示：如在体外，过重心可作一平面与物体不相交．这里我们自然假定物体有连续的密度函数．)

第17章 曲线积分

设 Γ 是 $\mathbf{R}^3$ 中一条可求长曲线，Γ 上分布着某种物质，其质量分布的(线)密度是 $\rho(\boldsymbol{p})=\rho(x,y,z)$. 如何求曲线 Γ 上的总质量?

如果在 Γ 上，密度 ρ 是一个常数 c，这就是说 Γ 上质量是均匀分布的，因此 Γ 上所聚积的总的质量就是 $s(\Gamma)c$，这里 $s(\Gamma)$ 表示 Γ 的弧长. 如果在 Γ 上质量不是均匀分布，那就要按照下述办法来处理. 设 Γ 的两个端点为 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$（当 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$ 时，Γ 是一条封闭曲线），在 Γ 上顺次插入一些分点 $\boldsymbol{p}_0$，$\boldsymbol{p}_1$，…，$\boldsymbol{p}_n$，使得 $\boldsymbol{p}_0=\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{p}_n=\boldsymbol{B}$. 令 $\Delta s_i=s(\widehat{\boldsymbol{p}_{i-1}\boldsymbol{p}_i})$，它表示 Γ 的第 i 段弧的弧长，$i=1,2,\cdots,n$. 在弧 $\widehat{\boldsymbol{p}_{i-1}\boldsymbol{p}_i}$ 上任取一点 $\boldsymbol{\xi}_i$，那么 $\rho(\boldsymbol{\xi}_i)\Delta s_i$ 就可以看成是第 i 段弧上的质量的一个近似值，而和式

$$\sum_{i=1}^{n}\rho(\boldsymbol{\xi}_i)\Delta s_i$$

就是 Γ 上的总质量的一个近似值. 把这种分割无限加细，即考虑极限

$$\lim_{\max\Delta s_i\to 0}\sum_{i=1}^{n}\rho(\boldsymbol{\xi}_i)\Delta s_i,$$

如果这个极限是有限的数，并且不依赖于点 $\boldsymbol{\xi}_i$ 在 Γ 的第 i 段弧上的选择，那么理所当然地把这一极限当作 Γ 上的总质量. 这就导致了第一型曲线积分的定义，我们加上了“第一型”这一定语，乃是为了区别在§17.2中将定义的另一类曲线积分.

§17.1 第一型曲线积分

首先，我们给出

定义 17.1 设 $D\subset\mathbf{R}^3$ 是一个区域，函数 $f: D\to\mathbf{R}$. 可求长曲线 $\Gamma\subset D$，其两个端点分别记为 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$. 在 Γ 上依次取一列点 $\{\boldsymbol{p}_i: i=0,1,\cdots,n\}$，使得 $\boldsymbol{p}_0=\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{p}_n=\boldsymbol{B}$. 称 $\widehat{\boldsymbol{p}_{i-1}\boldsymbol{p}_i}$ 为 Γ 的第 i 段曲线，令 $\Delta s_i=s(\widehat{\boldsymbol{p}_{i-1}\boldsymbol{p}_i})$，即 Γ 的第 i 段曲线的弧长. 在 $\widehat{\boldsymbol{p}_{i-1}\boldsymbol{p}_i}$ 上任取一点 $\boldsymbol{\xi}_i$（$i=1,2,\cdots,n$），如果极限

$$\lim_{\max\Delta s_i\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\boldsymbol{\xi}_i)\Delta s_i \tag{1}$$

是一个有限数，并且其值不依赖于点 $\boldsymbol{\xi}_i$ 在$\widehat{\boldsymbol{p}_{i-1}\boldsymbol{p}_i}$上的选择，那就把这个极限值记为

$$\int_\Gamma f(\boldsymbol{p})\mathrm{d}s \text{ 或者 } \int_\Gamma f(x,y,z)\mathrm{d}s,$$

称之为函数 f 在 Γ 上的**第一型曲线积分**.

有了这一定义之后，那么当可求长曲线 Γ 上有密度函数 ρ 时，曲线 Γ 上的质量就是曲线积分 $\int_\Gamma \rho\mathrm{d}s$.

如果 $f(\boldsymbol{p})=1$ 对 $\boldsymbol{p}\in\Gamma$ 成立，我们有

$$\int_\Gamma \mathrm{d}s = s(\Gamma),$$

即曲线 Γ 的弧长．如何计算曲线的弧长，在本书上册 § 8.3 中有过详细的讨论.

从根本上说，第一型曲线积分的定义并不包含新奇的意义，它体现的只不过是在建立定积分、二重积分和三重积分时使用过的同样的手法.

现在来看看如何计算第一型曲线积分．设 Γ 是一条光滑曲线，也就是说 Γ 有向量参数表示 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$，$t\in[\alpha,\beta]$，并且有连续的、非零的导向量．设 Γ 上的那些分点 $\boldsymbol{p}_i$ 对应于参数 t_i，即 $\boldsymbol{p}_i=\boldsymbol{r}(t_i)$，$i=0$，1，…，$n$ 且 $\alpha=t_0<t_1<\cdots<t_{n-1}<t_n=\beta$；又设 $\boldsymbol{\xi}_i\in\widehat{\boldsymbol{p}_{i-1}\boldsymbol{p}_i}$所对应的参数为 $\eta_i\in[t_{i-1},t_i]$，即 $\boldsymbol{\xi}_i=\boldsymbol{r}(\eta_i)$，$i=1$，2，…，$n$．由 § 8.3 的公式(8)可知曲线 Γ 上变点的弧长是

$$s(t)=\int_\alpha^t \|\boldsymbol{r}'(\tau)\|\mathrm{d}\tau,$$

由此可知

$$\Delta s_i = s(t_i)-s(t_{i-1})=\int_{t_{i-1}}^{t_i}\|\boldsymbol{r}'(\tau)\|\mathrm{d}\tau,$$

对上式右边应用积分中值定理，得出

$$\Delta s_i=\|\boldsymbol{r}'(\zeta_i)\|(t_i-t_{i-1})=\|\boldsymbol{r}'(\zeta_i)\|\Delta t_i,$$

式中 $\zeta_i\in[t_{i-1},t_i]$，$i=1$，2，…，n．这样，(1)式变为

$$\lim_{\max\Delta s_i\to 0}\sum_{i=1}^n f\circ\boldsymbol{r}(\eta_i)\|\boldsymbol{r}'(\zeta_i)\|\Delta t_i.$$

在 Γ 为光滑曲线的假设下，$\max\Delta s_i\to 0$ 等价于 $\max\Delta t_i\to 0$，因此上式相当于

$$\lim_{\max\Delta t_i\to 0}\sum_{i=1}^n f\circ\boldsymbol{r}(\eta_i)\|\boldsymbol{r}'(\zeta_i)\|\Delta t_i. \tag{2}$$

由于一般地，$\eta_i\neq\zeta_i$，故(2)式右边的和式不是某个函数的积分和，但是 η_i 与 ζ_i 是在同一个区间$[t_{i-1},t_i]$之内，在定理的条件下，把它们统一起来写成

$$\lim_{\max\Delta t_i\to 0}\sum_{i=1}^{n} f\circ \boldsymbol{r}(\eta_i)\,\|\boldsymbol{r}'(\eta_i)\|\,\Delta t_i, \tag{3}$$

对极限值并无影响，这中间的理由我们已在定理8.1的证明中严格说明过，若再重复就显得多余了．在那个证明中，我们是把三个这样的点“统一起来”，这种手法将在下一节的定理17.2的证明中再次运用，在那里，我们更不提这种多余的话了．

这时，(3)式右边的和式已是一个 Riemann 和，因此(3)式就等于

$$\int_\alpha^\beta f\circ \boldsymbol{r}(t)\,\|\boldsymbol{r}'(t)\|\,\mathrm{d}t. \tag{4}$$

现在，把前面推导的结果写成定理的形式．

定理 17.1 设区域 $D\subset\mathbf{R}^3$，光滑曲线 $\Gamma\subset D$，函数 f: $D\to\mathbf{R}$ 连续．设 Γ 有向量参数表示 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$，$t\in[\alpha,\beta]$，那么

$$\int_\Gamma f\mathrm{d}s=\int_\alpha^\beta f\circ \boldsymbol{r}(t)\,\|\boldsymbol{r}'(t)\|\,\mathrm{d}t. \tag{5}$$

也就是说，第一型曲线积分可以化成定积分来计算．

推论 设平面曲线 Γ 有显式表达 $y=\varphi(x)$，$x\in[a,b]$，其中 φ 在 $[a,b]$ 上连续，那么

$$\int_\Gamma f\mathrm{d}s=\int_a^b f(x,\varphi(x))\sqrt{1+(\varphi'(x))^2}\,\mathrm{d}x. \tag{6}$$

为了方便读者，我们把这个计算过程格式化．

1° 求出 Γ 的一个向量参数方程 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$；

2° 计算弧元 $\mathrm{d}s=\|\boldsymbol{r}'(t)\|\,\mathrm{d}t$；

3° 计算定积分 $\int_\alpha^\beta f\circ \boldsymbol{r}(t)\,\|\boldsymbol{r}'(t)\|\,\mathrm{d}t$．

例 1 计算第一型曲线积分 $\int_\Gamma \frac{z^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}s$，其中 Γ 为圆柱螺线

$$x=a\cos t,\quad y=a\sin t,\quad z=bt,\quad t\in[0,2\pi].$$

解 这时参数方程已经给出，只需进行直接的计算，我们有 $\mathrm{d}s=\sqrt{a^2+b^2}\,\mathrm{d}t$，所以

$$\begin{aligned}\int_\Gamma \frac{z^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}s&=\left(\frac{b}{a}\right)^2\sqrt{a^2+b^2}\int_0^{2\pi}t^2\mathrm{d}t\\&=\frac{8}{3}\left(\frac{b}{a}\right)^2\sqrt{a^2+b^2}\,\pi^3.\end{aligned}$$ □

例 2 计算 $\int_\Gamma xy\mathrm{d}s$，其中 Γ 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与平面 $x+y+z=0$ 交成的圆周．

解 我们首先应为 Γ 选取一个向量参数方程. 由于 Γ 所在平面的法向量为(1,1,1), 我们取

$$\boldsymbol{e}_1=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,\ -2,\ 1),$$

$$\boldsymbol{e}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,\ 0,\ -1),$$

$$\boldsymbol{e}_3=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,\ 1,\ 1),$$

这是三个互相垂直的单位向量, $\boldsymbol{e}_1$ 和 $\boldsymbol{e}_2$ 张成 Γ 所在的平面. 因此, Γ 的向量方程是

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(\theta)=a(\boldsymbol{e}_1\cos\theta+\boldsymbol{e}_2\sin\theta),\quad \theta\in[0,2\pi].$$

这时弧元 $\mathrm{d}s=a\mathrm{d}\theta$, 而

$$x=a\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\cos\theta+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta\right),$$

$$y=a\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}\cos\theta\right),$$

所以

$$\begin{aligned}\int_\Gamma xy\mathrm{d}s&=a^3\int_0^{2\pi}\left(-\frac{2}{6}\cos^2\theta-\sqrt{\frac{2}{6}}\sin\theta\cos\theta\right)\mathrm{d}\theta\\&=-\frac{1}{3}a^3\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta=-\frac{1}{3}\pi a^3.\end{aligned}$$

以上表述的是常规的算法. 对本题而言, 还有一种特殊的解法. 结合代数的与几何的对称性, 可知

$$\int_\Gamma xy\mathrm{d}s=\int_\Gamma yz\mathrm{d}s=\int_\Gamma zx\mathrm{d}s,$$

所以

$$\begin{aligned}\int_\Gamma xy\mathrm{d}s&=\frac{1}{3}\int_\Gamma(xy+yz+zx)\mathrm{d}s\\&=\frac{1}{6}\int_\Gamma((x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2))\mathrm{d}s\\&=-\frac{1}{6}\int_\Gamma a^2\mathrm{d}s=-\frac{1}{6}a^2s(\Gamma)=-\frac{1}{6}a^2 2\pi a\\&=-\frac{1}{3}\pi a^3.\end{aligned}$$ □

下面, 我们将从另一物理问题, 即在力场中运动着的质点作功的问题, 来引入另一类曲线积分, 即第二型曲线积分.

练习题 17.1

1. 计算下列曲线积分：

(1) $\int_\Gamma (x^2+y^2)^n \mathrm{d}s$，$\Gamma$：$x=a\cos t$，$y=a\sin t$，$0\leqslant t\leqslant 2\pi$，其中 $n\in\mathbf{N}_+$；

(2) $\int_\Gamma (x+y)\mathrm{d}s$，$\Gamma$：顶点为$(0,0)$，$(1,0)$，$(0,1)$的三角形的边界；

(3) $\int_\Gamma z\mathrm{d}s$，Γ：圆锥螺线 $x=t\cos t$，$y=t\sin t$，$z=t$，$t\in[0,2\pi]$；

(4) $\int_\Gamma x^2\mathrm{d}s$，$\Gamma$：圆周 $x^2+y^2+z^2=a^2$，$x+y+z=0$；

(5) $\int_\Gamma y^2\mathrm{d}s$ ，Γ：旋轮线的一拱：$x=a(t-\sin t)$，$y=a(1-\cos t)$，$0\leqslant t\leqslant 2\pi$.

2. 考察椭圆

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0),$$

称

$$e=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}$$

为该椭圆的离心率．试通过 e 和曲线积分来表示椭圆的周长．

3. 曲线 Γ 用极坐标方程 $r=f(\theta)$，$\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta$ 来表示，其中 f 连续可导．证明：Γ 的长度为

$$\int_\alpha^\beta \sqrt{(f(\theta))^2+(f'(\theta))^2}\mathrm{d}\theta.$$

利用这一公式表达前题中椭圆的周长．

§ 17.2 第二型曲线积分

设区域 $D\subset\mathbf{R}^3$，在 D 上定义了一个向量值函数 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{p})$，$\boldsymbol{p}\in D$．这时我们说 $\boldsymbol{F}$ 是在 D 上定义的一个**向量场**．在实际中，它可以是力场、电场、磁场、速度场，等等．

同时，在 D 中还有一条**有向曲线** Γ．所谓有向曲线是指，它是通常的一

条曲线但还带有前进的方向，比如说，端点 A 是它的起点，而另一端点 B 是它的终点，一旦指明了起点和终点，就等于是给这一曲线**定了方向**. 为了进行讨论，应当设 Γ 是可求长的.

设想一个质点在力场 $\boldsymbol{F}$ 的作用下，自 Γ 的起点 A 运动到终点 B，我们要来计算力场所作的功，称之为**力场 $\boldsymbol{F}$ 在有向曲线 Γ 上所作的功**. 从 A 到 B 在 Γ 上插入若干分点 $\{\boldsymbol{p}_i : i=0,1,\cdots,n\}$，使得 $\boldsymbol{p}_0=A, \boldsymbol{p}_n=B$. 如果这些分点足够细密，那么质点沿着由 $\boldsymbol{p}_{i-1}$ 到 $\boldsymbol{p}_i$ 这一段弧 $\overset{\frown}{\boldsymbol{p}_{i-1}\boldsymbol{p}_i}$ 上的运动，可以看成是在直线段 $\boldsymbol{p}_{i-1}\boldsymbol{p}_i$ 上运动，并且在这一段弧上，力场 $\boldsymbol{F}$ 基本上是一常力 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\xi}_i)$，其中点 $\boldsymbol{\xi}_i$ 可以在这一段弧上任取. 这一段有方向的弧段 $\overset{\frown}{\boldsymbol{p}_{i-1}\boldsymbol{p}_i}$ 称为 Γ 的第 i 段，在这一段上力场 $\boldsymbol{F}$ 所作的功

$$W_i \sim \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\xi}_i)\cdot\boldsymbol{p}_{i-1}\boldsymbol{p}_i = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\xi}_i)\cdot(\boldsymbol{p}_i-\boldsymbol{p}_{i-1}),$$

因此力场 $\boldsymbol{F}$ 在 Γ 上所作的功

$$W \sim \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\xi}_i)\cdot\Delta\boldsymbol{p}_i,$$

这里 $\Delta\boldsymbol{p}_i=\boldsymbol{p}_i-\boldsymbol{p}_{i-1}(i=1,2,\cdots,n)$. 如果我们要得到 W 的精确值，那就应当把这种分割"无限细分"下去.

沿着我们走过多次的"轻车熟路"，到此就会明确地知道应当朝哪个方向走下去. 我们给出

定义 17.2 设 $D\subset\mathbf{R}^3$ 是一个区域，映射 $\boldsymbol{F}: D\to\mathbf{R}^3$. 可求长的有向曲线 $\Gamma\subset D$，其起点记为 A，终点记为 B. 在 Γ 上依从 A 到 B 的方向顺次取一列点 $\{\boldsymbol{p}_i:\ i=0,\ 1,\ \cdots,\ n\}$，使得 $\boldsymbol{p}_0=A$，$\boldsymbol{p}_n=B$. 置 $\Delta\boldsymbol{p}_i=\boldsymbol{p}_i-\boldsymbol{p}_{i-1}$，$i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$. 如果对于在 Γ 的弧段 $\overset{\frown}{\boldsymbol{p}_{i-1}\boldsymbol{p}_i}$ 上任取的点 $\boldsymbol{\xi}_i$，极限

$$\lim_{\max\|\Delta\boldsymbol{p}_i\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\xi}_i)\cdot\Delta\boldsymbol{p}_i \tag{1}$$

为一确定的有限数，则将这个数记为

$$\int_\Gamma \boldsymbol{F}(\boldsymbol{p})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{p}, \tag{2}$$

称它是向量值函数 $\boldsymbol{F}$ 沿有向曲线 Γ 上的**第二型曲线积分**.

从定义 17.1 和定义 17.2 来看，无论是第一型还是第二型曲线积分，其运算性质（例如，常数因子可以提到积分号外来，积分的可加性等等）同定积分和重积分的相应性质没有两样. 但是，对第二型曲线积分来说，有一条很特殊的性质需要指明，那就是它的方向性. 设 Γ 是一条有向曲线，如果我们把它的走向颠倒过来，得出的另一条定向曲线记为 $-\Gamma$，由定义 17.2 可以看到

$$\int_\Gamma \boldsymbol{F}(\boldsymbol{p})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{p} = -\int_{-\Gamma}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{p})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{p},$$

由此可见，如果我们没有把定向弄正确，那么，计算的结果就差一个负号.

关于第二型曲线积分的计算，我们有

定理 17.2 设区域 $D\subset\mathbf{R}^3$，连续映射 $\boldsymbol{F}$: $D\to\mathbf{R}^3$. 又设 $\Gamma\subset D$ 是一条有向的光滑曲线，它具有参数向量方程 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$，$\alpha\leqslant t\leqslant\beta$，并且**参数 t 的增加对应着 Γ 的定向**，那么有

$$\int_\Gamma \boldsymbol{F}(\boldsymbol{p})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{p}=\int_\alpha^\beta \boldsymbol{F}\circ\boldsymbol{r}(t)\cdot\boldsymbol{r}'(t)\mathrm{d}t. \tag{3}$$

证明 对在定义 17.2 中谈到的那一列分点 $\{\boldsymbol{p}_i\}$，可设 $\boldsymbol{r}(t_i)=\boldsymbol{p}_i$，$i=0$，1，…，$n$，其中 $\alpha=t_0<t_1<\cdots<t_{n-1}<t_n=\beta$. 在 Γ 的弧段 $\widehat{\boldsymbol{p}_{i-1}\boldsymbol{p}_i}$ 上的那个点 $\boldsymbol{\xi}_i$，可设 $\boldsymbol{\xi}_i=\boldsymbol{r}(\tau_i)$，其中 $\tau_i\in[t_{i-1},t_i]$，$i=1$，2，…，n. 由于

$$\Delta\boldsymbol{p}_i=\boldsymbol{p}_i-\boldsymbol{p}_{i-1}=\boldsymbol{r}(t_i)-\boldsymbol{r}(t_{i-1}),\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ n,$$

所以

$$\sum_{i=1}^n \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\xi}_i)\cdot\Delta\boldsymbol{p}_i=\sum_{i=1}^n \boldsymbol{F}\circ\boldsymbol{r}(\tau_i)\cdot(\boldsymbol{r}(t_i)-\boldsymbol{r}(t_{i-1})).$$

令 $\boldsymbol{r}(t)=(x(t),\ y(t),\ z(t))$，$\boldsymbol{F}=(P,Q,R)$，那么上式的右边便可写成

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^n P\circ\boldsymbol{r}(\tau_i)(x(t_i)-x(t_{i-1}))+\sum_{i=1}^n Q\circ\boldsymbol{r}(\tau_i)(y(t_i)-y(t_{i-1}))\\&\quad+\sum_{i=1}^n R\circ\boldsymbol{r}(\tau_i)(z(t_i)-z(t_{i-1})),\end{aligned} \tag{4}$$

由微分中值定理，可得

$$\begin{aligned}x(t_i)-x(t_{i-1})&=x'(\lambda_i)\Delta t_i,\\y(t_i)-y(t_{i-1})&=y'(\mu_i)\Delta t_i,\\z(t_i)-z(t_{i-1})&=z'(\nu_i)\Delta t_i,\end{aligned}$$

这里 λ_i，μ_i，$\nu_i\in[t_{i-1},t_i]$，$i=1$，2，…，n，从而(4)可以写成

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^n P\circ\boldsymbol{r}(\tau_i)x'(\lambda_i)\Delta t_i+\sum_{i=1}^n Q\circ\boldsymbol{r}(\tau_i)y'(\mu_i)\Delta t_i\\&\quad+\sum_{i=1}^n R\circ\boldsymbol{r}(\tau_i)z'(\nu_i)\Delta t_i.\end{aligned} \tag{5}$$

注意到在定理的条件下，$\max\|\Delta\boldsymbol{p}_i\|\to0$ 等价于 $\max\Delta t_i\to0$，由(3)及(5)得出

$$\begin{aligned}\int_\Gamma \boldsymbol{F}(\boldsymbol{p})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{p}&=\int_\alpha^\beta(P\circ\boldsymbol{r}(t)x'(t)+Q\circ\boldsymbol{r}(t)y'(t)\\&\quad+R\circ\boldsymbol{r}(t)z'(t))\mathrm{d}t,\end{aligned} \tag{6}$$

采用向量内积的记号，上式右边便是

$$\int_\alpha^\beta \boldsymbol{F}\circ\boldsymbol{r}(t)\cdot\boldsymbol{r}'(t)\mathrm{d}t,$$

这样就证明了公式(3)的正确性. □

令 $\boldsymbol{p}=(x,y,z)$表示曲线 Γ 上的径向量，那么 $\mathrm{d}\boldsymbol{p}=(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z)$. 设 $\boldsymbol{F}=(P,Q,R)$，于是

$$\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{p}=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z.$$

因此，第二型曲线积分(2)又有一种记法

$$\int_{\Gamma}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z.$$

这时，(6)式可以写成

$$\begin{aligned}&\int_{\Gamma}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z\\&=\int_{\alpha}^{\beta}(P(x(t),y(t),z(t))x'(t)+Q(x(t),y(t),z(t))y'(t)\\&\quad+R(x(t),y(t),z(t))z'(t))\mathrm{d}t.\end{aligned}\tag{7}$$

例 1 计算第二型曲线积分

$$\int_{K}xy\mathrm{d}x,\ \int_{L}xy\mathrm{d}x,\ \int_{M}xy\mathrm{d}x,$$

其中 K 是从(0,0)到(1,1)的直线段；L 是从(0,0)到(1,1)的抛物线 $y=x^2$ 的一段；M 是由从(0,0)到(1,0)的一段直线 M_1 和从(1,0)到(1,1)的直线段 M_2 连成的有向折线.

解 K 和 L 的方程分别是 $y=x$ 和 $y=x^2$，x 从 0 变到 1，所以

$$\int_{K}xy\mathrm{d}x=\int_0^1x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3};$$

$$\int_{L}xy\mathrm{d}x=\int_0^1x\cdot x^2\mathrm{d}x=\int_0^1x^3\mathrm{d}x=\frac{1}{4};$$

最后

$$\int_{M}xy\mathrm{d}x=\int_{M_1}xy\mathrm{d}x+\int_{M_2}xy\mathrm{d}x,$$

在 M_1 上 $y=0$，而在 M_2 上 $x=1$，所以 $\mathrm{d}x=0$，总起来

$$\int_{M}xy\mathrm{d}x=0.\quad\square$$

例 2 设 Γ 是由球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 和平面 $x+y+z=0$ 交成的圆周，从第一卦限内看 Γ，它的方向是按反时针方向进行的. 计算第二型曲线积分：

1° $\displaystyle\int_{\Gamma}x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z;$

2° $\displaystyle\int_{\Gamma}z\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}z.$

解 利用 § 17.1 的例 2 已得的结果写出 Γ 的参数方程

$$x = a\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\cos\ \theta + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\ \theta\right),$$

$$y = -a\frac{2}{\sqrt{6}}\cos\ \theta,$$

$$z = a\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\cos\ \theta - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\ \theta\right),$$

为了与 Γ 的定向相匹配，参数 θ 的变化范围应是从 0 变到 2π，这是因为我们很容易证明 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ 组成互相正交的右手系(它们的坐标组成的三阶行列式为 1).

1° 由于

$$\int_\Gamma y\mathrm{d}y = -\frac{2}{3}a^2\int_0^{2\pi}\cos\ \theta\sin\ \theta\mathrm{d}\theta = 0,$$

由对称性

$$\int_\Gamma x\mathrm{d}x = \int_\Gamma z\mathrm{d}z = 0,$$

从而 $\int_\Gamma x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y + z\mathrm{d}z = 0$.

事实上，不通过具体计算也能看出这一结果. 设 $\boldsymbol{p} = (x, y, z)$是 Γ 上的点的径向量，于是，$\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p} = a^2$，所以 $\boldsymbol{p}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{p} = 0$ 在 Γ 上成立，所以 $\int_\Gamma \boldsymbol{p}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{p} = 0$.

2° 由于 $\mathrm{d}z = -a\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\sin\ \theta + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\ \theta\right)\mathrm{d}\theta$，所以

$$\begin{aligned}\int_\Gamma y\mathrm{d}z &= \frac{2}{\sqrt{6}}a^2\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\sin\ \theta + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\ \theta\right)\cos\ \theta\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{2}{\sqrt{6}}a^2\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}\pi a^2,\end{aligned}$$

用同样方法立即得到

$$\int_\Gamma z\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y + y\mathrm{d}z = \sqrt{3}\pi a^2. \quad \square$$

既然第一型和第二型的曲线积分都可化成定积分来计算，我们就应当看看这两型曲线积分之间有什么联系.

设 s 为 Γ 的弧长参数，弧长的增长正好对应着 Γ 的正方向. 在 § 8.3 中我们已经知道 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}s} = \boldsymbol{T}_0(s)$是曲线 Γ 的单位切向量，由此可得 $\mathrm{d}\boldsymbol{p} = \boldsymbol{T}_0(s)\mathrm{d}s$，那么

$$\int_{\Gamma} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{p} = \int_{\Gamma} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{T}_0(s)\mathrm{d}s, \tag{8}$$

上式的右边就是一个第一型的曲线积分，在使用公式(8)的时候，一定要注意让单位切向量指着 Γ 的正方向.

例 3 计算 $\int_{\Gamma} x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x$，其中 Γ 是 xy 平面上中心在原点、半径为 a、沿反时针方向绕行的圆周.

解 这时，曲线积分可表示为 $\int_{\Gamma} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{p}$，其中 $\boldsymbol{F} = (-y, x)$. 我们有 $\boldsymbol{T}_0 = \frac{1}{a}(-y, x)$，所以

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{p} &= \int_{\Gamma} (\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{T}_0)\mathrm{d}s = \frac{1}{a}\int_{\Gamma} (x^2 + y^2)\mathrm{d}s \\ &= a\int_{\Gamma} \mathrm{d}s = as(\Gamma) = 2\pi a^2. \quad \square\end{aligned}$$

练习题 17.2

1. 定向的 Bézier 曲线

$$\boldsymbol{p}(t) = \sum_{i=0}^{n} B_i^n(t)\boldsymbol{a}_i, \quad t \in [0,1]$$

在经过参数变换 $t = 1 - \tau$ 之后，曲线有怎样的定向？控制点的分布有怎样的改变？

2. 计算下列第二型曲线积分：

(1) $\displaystyle\int_{\Gamma} \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2 + y^2}$,

Γ 表示反时针方向的圆周 $x^2 + y^2 = a^2$；

(2) $\displaystyle\int_{\Gamma} (x + y)\mathrm{d}x + (x - y)\mathrm{d}y$,

Γ 表示反时针方向的椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$；

(3) $\displaystyle\int_{\Gamma} (x^2 - 2xy)\mathrm{d}x + (y^2 - 2xy)\mathrm{d}y$,

Γ: $x = y^2$, $y \in [-1,1]$沿 y 增加的方向；

(4) $\displaystyle\int_{\Gamma} x\mathrm{d}y$,

Γ：直线 $2x+y=1$ 与两坐标轴组成的三角形，沿反时针方向；

(5) $\int\limits_{\Gamma}(x^2+y^2)\mathrm{d}y$，

Γ 是直线 $x=1$，$x=3$ 和 $y=1$，$y=4$ 构成的矩形，沿反时针方向.

3. 设常数 a，b，c 满足 $ac-b^2>0$，计算积分

$$\int\limits_{\Gamma}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{ax^2+2bxy+cy^2},$$

其中 Γ 为反时针方向的单位圆周.

4. 计算下列第二型曲线积分，曲线的正向是参数增加的方向：

(1) $\int\limits_{\Gamma}xz^2\mathrm{d}x+yx^2\mathrm{d}y+zy^2\mathrm{d}z$，

Γ：$x=t$，$y=t^2$，$z=t^3$，$t\in[0,1]$；

(2) $\int\limits_{\Gamma}(y+z)\mathrm{d}x+(z+x)\mathrm{d}y+(x+y)\mathrm{d}z$，

Γ：$x=a\sin^2 t$，$y=2a\sin t\cos t$，$z=a\cos^2 t$，$t\in[0,\pi]$.

5. 计算 $\int\limits_{\Gamma}(y^2-z^2)\mathrm{d}x+(z^2-x^2)\mathrm{d}y+(x^2-y^2)\mathrm{d}z$，

Γ 为球面片 $x^2+y^2+z^2=1$，$x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$，$z\geqslant 0$ 的边界，方向是从 $(1,0,0)$ 到 $(0,1,0)$ 到 $(0,0,1)$ 再回到 $(1,0,0)$.

6. 计算 $\int\limits_{\Gamma}y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z$，

Γ 是平面 $x+y=2$ 和球面 $x^2+y^2+z^2=2(x+y)$ 交成的圆周，眼睛从原点看去顺时针方向是 Γ 的正向.

7. 计算上题所示的积分，但 Γ 是曲面 $z=xy$ 和 $x^2+y^2=1$ 的交线，沿 Γ 的正向行进时，z 轴在左手边.

8. 定向曲线 Γ：$x^2+y^2+z^2=a^2$，$x^2+y^2=ax$，$z\geqslant 0$，眼睛从点 $\left(\frac{a}{2},0,0\right)$ 望去，沿反时针方向行进. 试计算力场 $\boldsymbol{F}=(y^2,z^2,x^2)$ 沿 Γ 所作的功.

9. 质量为 m 的质点在力场 $\boldsymbol{F}$ 的作用下沿曲线 Γ 运动，Γ 的起点为 $\boldsymbol{a}$，终点为 $\boldsymbol{b}$，用 $\boldsymbol{v}$ 记质点移动的速度向量. 求证：力场 $\boldsymbol{F}$ 所作的功

$$\int\limits_{\Gamma}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{p}=\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2(\boldsymbol{p})\Big|_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}}.$$

10. 证明：$\left|\int\limits_{\Gamma}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{p}\right|\leqslant\int\limits_{\Gamma}\|\boldsymbol{F}\|\mathrm{d}s$.

§ 17.3 Green 公式

在一定的条件下，沿着平面区域的边界的第二型曲线积分，可以转化成在这个区域上的二重积分，我们首先来讨论两种比较特殊的平面区域.

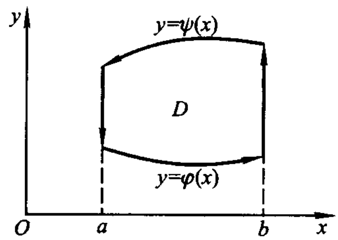


图 17-1

考察 $\mathbf{R}^2$ 中的闭区域

$D=\{(x,y):\ \varphi(x)\leqslant y\leqslant\psi(x),\ a\leqslant x\leqslant b\}$，

这里 φ，ψ：$[a,b]\to\mathbf{R}$ 是连续函数，并且 $\varphi\leqslant\psi$. 为了行文方便，我们把像 D 这样的区域称为甲类区域. 按照下列法则给 D 的边界 ∂D 定向：当一个人沿着 ∂D 行进的时候，区域 D 总是在这个人的左手边(见图 17-1).

设函数 P：$D\to\mathbf{R}$ 连续并且有连续的偏导数，我们来计算第二型曲线积分 $\int_{\partial D}P\mathrm{d}x$. 把 ∂D 分成四段 K，L，M 和 N，它们分别是

$$
\begin{aligned}
&K:\ y=\varphi(x), && a\leqslant x\leqslant b;\\
&L:\ x=b, && \varphi(b)\leqslant y\leqslant\psi(b);\\
&M:\ y=\psi(x), && b\geqslant x\geqslant a;\\
&N:\ x=a, && \psi(a)\geqslant y\geqslant\varphi(a).
\end{aligned}
$$

它们都是定向的曲线，满足

$$\int_{\partial D}P\mathrm{d}x=\int_K P\mathrm{d}x+\int_L P\mathrm{d}x+\int_M P\mathrm{d}x+\int_N P\mathrm{d}x.$$

在直线段 L 和 N 上，x 都是常数，应有 $\mathrm{d}x=0$，所以

$$\int_L P\mathrm{d}x=\int_N P\mathrm{d}x=0.$$

从而有

$$
\begin{aligned}
\int_{\partial D}P\mathrm{d}x&=\int_K P\mathrm{d}x+\int_M P\mathrm{d}x=\int_a^b P(x,\varphi(x))\mathrm{d}x+\int_b^a P(x,\psi(x))\mathrm{d}x\\
&=\int_a^b\left(P(x,\varphi(x))-P(x,\psi(x))\right)\mathrm{d}x\\
&=-\int_a^b\left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}\frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=-\iint_D\frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.
\end{aligned}
$$

这样，我们把沿 ∂D 的第二型曲线积分，转化为展布在 D 上的二重积分：

$$\int_{\partial D} P\mathrm{d}x = \iint_D \left(-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{1}$$

设 $\mathbf{R}^2$ 中的闭区域 Ω 可以分拆为有限个甲类区域 D_1，D_2，…，D_m 的并集，这些区域中的任意两个没有公共的内点：

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{m} D_i.$$

如果函数 P 在 Ω 上连续且有连续的偏导数，那么就有

$$\iint_\Omega \left(-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sum_{i=1}^{m}\iint_{D_i}\left(-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sum_{i=1}^{m}\int_{\partial D_i} P\mathrm{d}x.$$

设 D_i 与 D_j 是相邻的两个区域，它们有一段公共的边界，把它看成 ∂D_i 的边界和 ∂D_j 的边界时，定向正好相反，这将使得沿这一段公共边界的两个积分互相抵消(见图 17 - 2)，这就是说

$$\sum_{i=1}^{m}\int_{\partial D_i} P\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} P\mathrm{d}x.$$

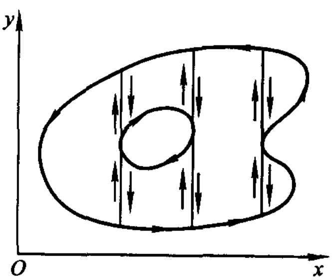


图 17 - 2

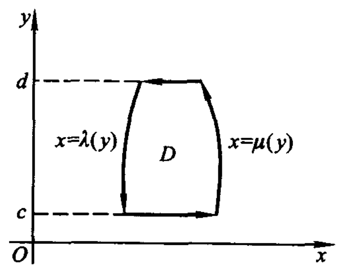


图 17 - 3

于是，我们得到

$$\int_{\partial\Omega} P\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{m}\int_{\partial D_i} P\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{m}\iint_{D_i}\left(-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

即

$$\int_{\partial\Omega} P\mathrm{d}x = \iint_\Omega \left(-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

所谓“乙类区域”是指这样的区域

$$D = \{(x,y):\ \lambda(y)\leqslant x\leqslant \mu(y),\ c\leqslant y\leqslant d\},$$

见图 17 - 3.

如果函数 Q：$D\to\mathbf{R}$ 连续并有连续的偏导数，与对甲类区域的讨论相似，可以得到

$$\int_{\partial D} Q\mathrm{d}y = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

综合以上两类情形，就可以得到这样的结论：设 Ω 是 $\mathbf{R}^2$ 中的闭区域，它既可以分拆为有限个甲类区域，又可以分拆为有限个乙类区域(在许多具体问题中,所涉及的闭区域都能满足这种条件)，如果函数 P 和 Q 在 Ω 上连续并且有连续的偏导数，那么就有

$$\int_{\partial\Omega} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \iint_{\Omega}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

这里的 ∂D 是定向曲线，我们已对它的正向作过规定.

其实，上述公式对于更一般的区域也能成立，我们把结论写成下列定理.

定理 17.3 (Green) 设 $\Omega\subset\mathbf{R}^2$ 是由有限条分段光滑的曲线围成的闭区域. 如果函数 $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$ 在 Ω 上连续并有连续的偏导数，那么就有

$$\int_{\partial\Omega} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \iint_{\Omega}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 $\partial\Omega$ 是区域 Ω 的边界. 它的定向是这样被确定的：一个人沿着 $\partial\Omega$ 的正方向行进时，区域 Ω 总在这个人的左边.

平面图形的面积，在一定的条件下，也可以用第二型曲线积分计算.

例 1 设 D 是适合Green 公式的平面闭区域，则有

$$\sigma(D) = \int_{\partial D} x\mathrm{d}y = -\int_{\partial D} y\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{\partial D} x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x.$$

证明 利用 Green 公式

$$\int_{\partial D} x\mathrm{d}y = \iint_D \frac{\partial x}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D \mathrm{d}\sigma,$$

这就是

$$\sigma(D) = \int_{\partial D} x\mathrm{d}y,$$

同理可证

$$\sigma(D) = -\int_{\partial D} y\mathrm{d}x.$$

将以上两式相加，得出

$$\sigma(D) = \frac{1}{2}\int_{\partial D} x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x. \quad \square$$

例 2 计算椭圆的面积.

解 椭圆的参数方程是

$$x = a\cos t,\ y = b\sin t,\ 0\leqslant t\leqslant 2\pi.$$

由例 1 的结果，知

$$\sigma(D)=\int_{\partial D} x\mathrm{d}y = ab\int_0^{2\pi}\cos^2 t\mathrm{d}t=\pi ab. \qquad \square$$

例 3 计算积分

$$\int_{\Gamma}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2},$$

其中 Γ 是单位圆周：$x^2+y^2=1$，正向是反时针方向.

解 注意到 $x^2+y^2=1$，所以

$$\int_{\Gamma}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\int_{\Gamma}x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\text{单位圆面积的 2 倍}=2\pi.$$

如果令

$$P=\frac{-y}{x^2+y^2},\quad Q=\frac{x}{x^2+y^2},$$

直接计算易知

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}\quad (x^2+y^2>0).$$

可见这时不能应用 Green 公式，原因是在原点处 P，Q 和它们的偏导数不连续. $\square$

例 4 计算积分

$$A=\int_{\Gamma}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2},$$

其中 Γ 是任意一条包含原点在内(不通过原点)的分段光滑的封闭曲线.

解 由于 Γ 是有界闭集，所以它到原点的最近距离为正数. 作一个以原点为中心、以充分小的 $\epsilon>0$ 为半径的圆周 C_ϵ，它的正向仍定义为反时针方向,使得 Γ 与 C_ϵ 夹成一个区域 D (见图 17-4). 这时

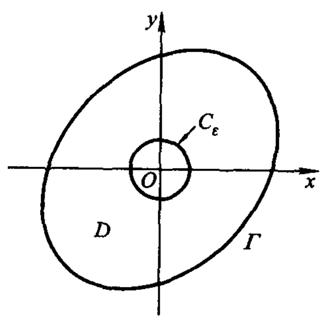


图 17-4

$$P=\frac{-y}{x^2+y^2},\quad Q=\frac{x}{x^2+y^2}$$

适合 Green 公式的一切条件，并且

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}.$$

利用 Green 公式可得

$$\int_{\partial D}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,$$

由于∂D 系由 Γ 与 $-C_\epsilon$ 组成，由此可知

$$
\begin{aligned}
A &= \int_{\Gamma} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = -\int_{-C_\varepsilon} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y \\
&= \int_{C_\varepsilon} \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2} = \frac{1}{\varepsilon^2}\int_{C_\varepsilon} x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\varepsilon^2} 2\pi\varepsilon^2 = 2\pi. \quad \square
\end{aligned}
$$

这个结果令人有点吃惊．其实，当我们注意到被积表达式

$$
\frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2} = \mathrm{d}\left(\arctan\frac{y}{x}\right) = \mathrm{d}\theta,
$$

这里 θ 是径向量(x,y)的辐角，就能看出，当点(x,y)在无论怎样一条包含原点在其内部的闭曲线上绕行一周之后，辐角的增量总是 2π.

练习题　17.3

1．利用 Green 公式计算下列积分：

(1) $\int_{\Gamma} xy^2\mathrm{d}y - x^2y\mathrm{d}x$，$\Gamma$ 为圆周 $x^2+y^2=a^2$ 的反时针方向；

(2) $\int_{\Gamma} (x+y)\mathrm{d}x - (x-y)\mathrm{d}y$，$\Gamma$ 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的反时针方向；

(3) $\int_{\Gamma} \mathrm{e}^x\sin y\mathrm{d}x + \mathrm{e}^x\cos y\mathrm{d}y$，$\Gamma$ 为上半圆周 $x^2+y^2=ax$ 沿 x 增加的方向．

2．用 Green 公式计算下列曲线围成的面积：

(1) 星形线 $x=a\cos^3 t$，$y=a\sin^3 t$，$0\leqslant t\leqslant 2\pi$；

(2) 双纽线 $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$（提示：令 $y=x\tan\theta$）；

(3) 笛卡尔叶形线 $x^3+y^3=3axy$ $(a>0)$（提示：令 $y=xt$）；

(4) $\left(\frac{x}{a}\right)^{2n+1}+\left(\frac{y}{b}\right)^{2n+1}=c\left(\frac{x}{a}\right)^n\left(\frac{y}{b}\right)^n$，常数 a，b，$c>0$，$n\in\mathbf{N}_+$．

3．设封闭曲线 Γ 有参数方程

$$
x=\varphi(t),\quad y=\psi(t),\quad t\in[\alpha,\beta],
$$

参数增加时指示 Γ 的正向．证明：Γ 围成的面积

$$
A=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\begin{vmatrix}\varphi(t) & \psi(t)\\ \varphi'(t) & \psi'(t)\end{vmatrix}\mathrm{d}t.
$$

4．单变量函数 f 连续可微，Γ 是任意一条分段光滑的封闭曲线．证明：

(1) $\int_{\Gamma} f(xy)(y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y)=0$；

(2) $\int_{\Gamma} f(x^2+y^2)(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)=0$;

(3) $\int_{\Gamma} f(x^n+y^n)(x^{n-1}\mathrm{d}x+y^{n-1}\mathrm{d}y)=0$，这里常数 $n\geqslant 1$.

5. 设 Γ 为 $\mathbf{R}^2$ 中的光滑封闭曲线，用 $\boldsymbol{n}$ 表示 Γ 各点上的单位外法向量. 设 $\boldsymbol{a}$ 是一个固定的单位向量，求证：

$$\int_{\Gamma} \cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{n})\mathrm{d}s=0,$$

这里 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{n})$ 表示 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 之间夹成的角.

6. 设 Γ 为一光滑的封闭曲线，$\boldsymbol{n}$ 表示单位外法向量，用 $(\boldsymbol{n},\boldsymbol{i})$ 表示 $\boldsymbol{n}$ 与 x 轴正向的夹角，$(\boldsymbol{n},\boldsymbol{j})$ 表示 $\boldsymbol{n}$ 与 y 轴正向的夹角，计算曲线积分

$$\int_{\Gamma} (x\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{i})+y\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{j}))\mathrm{d}s.$$

7. 计算曲线积分

$$\int_{\Gamma} \frac{\mathrm{e}^x}{x^2+y^2}((x\sin y-y\cos y)\mathrm{d}x+(x\cos y+y\sin y)\mathrm{d}y),$$

其中 Γ 是包含原点在其内部的分段光滑的闭曲线.

问题　17.3

1. 设 P，Q 在 $\mathbf{R}^2$ 上有连续偏导数，Γ 记以任意点 (x_0,y_0) 为中心，任意正数 r 为半径的上半圆周，如果

$$\int_{\Gamma} P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0,$$

证明：在 $\mathbf{R}^2$ 上有 $P=0$，$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=0$.

2. 证明平面上的 Green 第二公式

$$\iint_G \begin{vmatrix} \Delta u & \Delta v \\ u & v \end{vmatrix} \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\Gamma} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial n} & \dfrac{\partial v}{\partial n} \\ u & v \end{vmatrix} \mathrm{d}s,$$

这里 Γ 是光滑的封闭曲线，G 是由 Γ 所围成的区域，$\dfrac{\partial u}{\partial n}$，$\dfrac{\partial v}{\partial n}$ 是 u，v 沿 Γ 的外法线方向的方向导数，$\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$.

3. Γ 和 G 如上题所示. 如果 u 是 G 内的调和函数，即 $\Delta u=0$ 在 G 内成立. 那么对任意 $(x_0,y_0)\in G$ 有等式

$$u(x_0,y_0)=\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}\left(u\frac{\partial \log r}{\partial n}-\log r\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}s,$$

其中 $r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$ 是 (x_0,y_0) 与 Γ 上的动点 (x,y) 的距离.

4. 设 G 是 $\mathbf{R}^2$ 中的区域，u 是 G 中的调和函数，Γ 是以 (x_0,y_0) 为中心 R 为半径位于 G 中的任意一个圆周，那么

$$u(x_0,y_0)=\frac{1}{2\pi R}\int_{\Gamma}u(x,y)\mathrm{d}s.$$

§ 17.4 等周问题

在这一节里，我们用第二型曲线积分来解决一个古老的几何问题.

在周长相等的一切封闭曲线中，怎样的曲线包围的图形有最大的面积？这就是著名的**等周问题**. 早在古代，人们就已经意识到这样的曲线应该是圆周，但这一事实的严格数学证明还是在近代才出现的.

在 19 世纪，著名的几何学家 Steiner 曾经用非常朴素的几何方法证明了：除圆周外任何封闭曲线都不可能是等周问题的解. Steiner 的论据包括以下三个方面：

1° 如果某封闭曲线 Γ 是等周问题的解，那么 Γ 所围成的图形必须是凸的点集.

这是因为该图形如果不是凸集，设想它是图 17-5 中所画的那样，过 A 和 B 两点连成线段，然后把线段 AB 同曲线 Γ 所围成的那一部分朝直线对折过去，组成一个新的图形，那么我们就得到一个周长没有变化，但是面积增大了的图形.

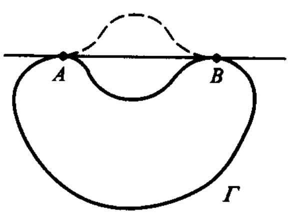


图 17-5

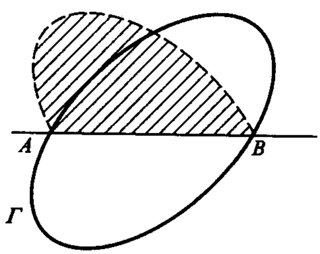


图 17-6

2° 设封闭曲线 Γ 是等周问题的解，那么，如果 Γ 上的两点 A 和 B 连成的直线段 AB 平分了 Γ 的周长，那么 AB 必平分了 Γ 所围成的图形的面积.

如果不是这样，设 AB 平分了 Γ 的周长，但未平分 Γ 所围成的图形的面

积，那么被 AB 分成的两部分图形中，必有一个面积较大，另一个面积较小．这时，如果我们把面积较大的那部分对着 AB 对折过去，我们将得到一个面积更大的图形，但是它的周长仍没有改变，见图 17－6．

3° 如果 Γ 是等周问题的解，在它的上面取任一条既平分 Γ 的周长又平分 Γ 所围成的图形的面积的弦 AB，那么 Γ 上任何异于 A 与 B 的点对弦 AB 的张角必须为一直角．

假如不是这样，设在图 17－7 图形的上半部分中 $\angle APB$ 不是直角，那么只需把其中的两块阴影部分绕着点 P 转动成图 17－8 的形状，使 $\angle A'PB'=\frac{\pi}{2}$，然后把这图形关于 $A'B'$ 对称过去，最后形成的图形保持着原来的周长，但具有更大的面积．

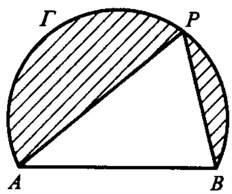


图　17－7

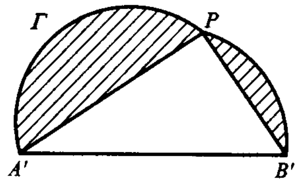


图　17－8

显然，具备性质 1°，2°和 3°的图形，必须是圆．

Steiner 的证明，非常简单，非常美妙，可惜的是，他并没有完整地解决等周问题．他只是证明了：除圆周之外的任何其他封闭曲线，都不可能是等周问题的解．换句话说，**如果**等周问题的解**存在**，那么非圆莫属．

Weierstrass 指出 Steiner 的“证明”中的漏洞，并举了一些例子来说明，忽视了**存在性**问题，可能产生重大的谬误．我们在这里举出一个简单的例子：对于大于 1 的任何正整数 n，有 $n^2>n$，因此 n 不可能是最大的正整数．但由此决不能断言 1 就是全体正整数集中的最大者，因为在这个集合中，最大者根本不存在！这个例子非常粗浅，人人都可以看出其中的症结．但是，对那些复杂的问题，这种漏洞非常隐蔽，一不小心便会落入陷阱．

现在，我们仅限于在分段连续可微的封闭曲线类中，来寻求等周问题的解答．以下的证明来自当代美国著名数学家 Peter Lax．

不失一般性，设封闭曲线 Γ 的周长为 2π．在曲线 Γ 上任取一点作为度量弧长的起点，沿反时针方向量出弧长为 π 的那一点．以这两点决定的直线作为横轴，它们的中点作为原点，并让起点在横轴的正方向上，这样建立起平面直角坐标系．用 Γ 自身的弧长 s 作参数，Γ 上的点可以写成 $(x(s),\ y(s))$，$s\in[0,2\pi]$，于是 $y(0)=y(\pi)=0$，并且 $x(0)+x(\pi)=0$．因此，曲线 Γ 所围

成的图形的面积是(见 § 17.3 的例 1)

$$A = -\int_{\Gamma} y\,\mathrm{d}x = -\int_0^{2\pi} yx'\,\mathrm{d}s.$$

这里，x' 表示 x 对弧长 s 求导．置

$$A_1 = -\int_0^{\pi} yx'\,\mathrm{d}s,\quad A_2 = -\int_{\pi}^{2\pi} yx'\,\mathrm{d}s,$$

利用平均值不等式，有

$$A_1 = \int_0^{\pi} y(-x')\,\mathrm{d}s \leqslant \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(y^2 + (x')^2)\,\mathrm{d}s. \tag{1}$$

由于参数 s 是弧长，所以$(x')^2 + (y')^2 = 1$，从而(1)式变为

$$A_1 \leqslant \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(y^2 + 1 - (y')^2)\,\mathrm{d}s. \tag{2}$$

令

$$u(s) = \frac{y(s)}{\sin s},\quad 0 < s < \pi.$$

由条件 $y(0) = y(\pi) = 0$，可以补充定义

$$u(0) = \lim_{s\to 0^+} u(s) = \lim_{s\to 0^+}\frac{y(s)}{\sin s} = y'(0);$$

$$u(\pi) = \lim_{s\to \pi^-} u(s) = \lim_{s\to \pi^-}\frac{y(s)}{\sin s} = -y'(\pi),$$

所以 u 在$[0,\pi]$上连续，在$(0,\pi)$内连续可导．

由 $y' = u'\sin s + u\cos s$，可以算出

$$\begin{aligned} y^2 + 1 - (y')^2 &= u^2(\sin^2 s - \cos^2 s) - 2uu'\sin s\cos s - (u')^2\sin^2 s + 1 \\ &= -(u^2\cos 2s + uu'\sin 2s) + 1 - (u')^2\sin^2 s \\ &= -\frac{1}{2}(u^2\sin 2s)' + 1 - (u')^2\sin^2 s, \end{aligned}$$

代入(2)得出

$$A_1 \leqslant \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1 - (u')^2\sin^2 s)\,\mathrm{d}s \leqslant \frac{\pi}{2}. \tag{3}$$

式(3)中等号成立的必要充分条件是$(u')^2\sin^2 s = 0$，亦即 $u' = 0$，这表明 u 只能是常数，记为 λ，从而 $y(s) = \lambda\sin s$．而且由(1)式可以看出，必须且只需有 $y = -x'$．将 $y = \lambda\sin s$ 代入等式

$$y^2 + (y')^2 = (x')^2 + (y')^2 = 1,$$

得出 $\lambda^2(\sin^2 s + \cos^2 s) = 1$，所以 $\lambda^2 = 1$，因 $y > 0$ 得 $\lambda = 1$．我们得到 $y = \sin s$，由 $x' = -y = -\sin s$ 得出

$$x = \cos s + \mu,$$

其中 μ 为常数，根据 $x(0) + x(\pi) = 0$，得出 $1 + \mu + (-1) + \mu = 0$，所以 $\mu =$

0. 最后得出

$$x=\cos s,\quad y=\sin s,\quad s\in[0,\pi],$$

这正是上半圆的方程. 用同样的方法处理 A_2，得出 Γ 的下半部分也必须是一个半圆. 这就证明了：为了取得最大的面积，必须且只需是单位圆. □

周长为 L 的圆的半径 r 适合 $2\pi r=L$，由此解出 $r=\frac{L}{2\pi}$，这圆的面积是

$$\pi r^2=\frac{L^2}{4\pi}.$$

这样，等周问题有另外的表述：周长为 L 的任何封闭曲线 Γ 所围成的面积若记作 A，那么总有不等式

$$L^2\geqslant 4\pi A,$$

式中的等号当且仅当 Γ 为圆周时成立.

第18章 曲面积分

在第17章里，我们详细地介绍了曲线积分. 曲线积分有两种类型：第一型和第二型的曲线积分. 我们即将看到，本章内容的脉络与前一章完全相似. 曲面积分也有第一型和第二型之分，第一型不涉及曲面的定向，而第二型曲面积分则与曲面的定向有关.

读者应当记得，第一型曲线积分，与曲线的弧长关系密切，而曲线弧长是在上册§8.3中就已经讨论过了. 第一型曲面积分与曲面面积的关联也很密切，因此，我们必须从曲面的面积讲起.

§18.1 曲面的面积

许多平面图形的面积的计算公式，早在Euclid的《几何原本》出现之前就已经建立起来了，特别是平面多边形的面积的计算，也许是更早一些的事. 对于一般的平面上有界点集的面积，在本书的§16.4中，已经通过二重积分给予定义.

多面体的表面是由一些平面多边形组成的，其表面积就是这些平面多边形的面积之和，因此多面体的表面积的计算就被认为是解决了. 对于弯曲的曲面，人们想到用内接于该曲面的多面体的表面积来逼近，这是很自然的事. 曲线的弧长正是用内接于该曲线的连续折线的长度来逼近的，对多面体抱有类似的希望又有什么不合理呢？但是，19世纪末，H.A.Schwarz给出的一个著名的例子说明，即使是对于非常简单的曲面，这种想法也是行不通的.

考虑一个底半径为1、高为1的直圆柱面Σ. 若将Σ沿一条母线剪开，然后把它平铺在平面上. 就变成了一个边长为1和2π的矩形，这个矩形的面积等于2π，因此Σ的表面积就应当等于2π. Schwarz考虑用多面体的边界来逼近这个直圆柱面：用与母线垂直的、间隔均匀的$m+1$张平面去分割这个直圆柱，截出$m+1$个圆周. 然后在每一个这样的圆周上，用n个分点把它等分. 这些分点是这样分布的：上一个圆周上的分点对最靠近它的下一圆周的垂直投影与下一圆周上的相邻两个分点有相等的距离. 图18－1中的分点A和B，C就代表这种关系.

再把 A，B，C 三点连成一个三角形，并且设想所有的有这种关系的三个分点都被这样地连成了三角形，造成了图 18－2 那样的模型，它是一个内接于直圆柱面的一个多面体．这个多面体由 $2mn$ 个全等的三角形组成．为了计算这个多面体的面积，只需计算一个这样的小三角形的面积好了．

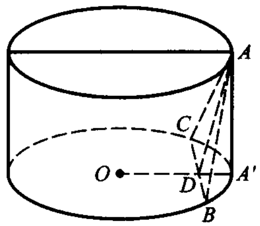


图 18－1

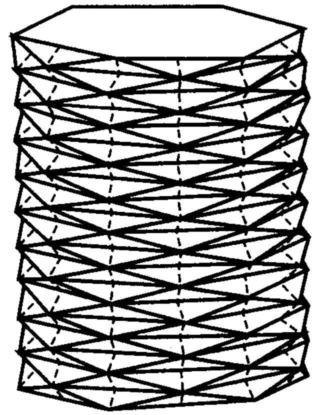


图 18－2

在图 18－1 中，我们看出$\angle BOA' = \frac{\pi}{n}$，从而 $A'D = 1 - \cos\frac{\pi}{n}$，所以

$$AD = \sqrt{A'A^2 + A'D^2} = \sqrt{\left(1 - \cos\frac{\pi}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{m}\right)^2},$$

所以三角形 ABC 的面积等于

$$\frac{1}{2}BC \cdot AD = BD \cdot AD = \sin\frac{\pi}{n} \cdot \sqrt{\left(1 - \cos\frac{\pi}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{m}\right)^2},$$

因而多面体的表面积等于

$$\begin{aligned}\sigma_{m,n} &= 2mn\sin\frac{\pi}{n} \cdot \sqrt{\left(1 - \cos\frac{\pi}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{m}\right)^2} \\ &= 2n\sin\frac{\pi}{n} \cdot \sqrt{m^2\left(1 - \cos\frac{\pi}{n}\right)^2 + 1}.\end{aligned}$$

当 m 和 n 同时无限增加时，所有那些小三角形的直径趋向于零，但 $\sigma_{m,n}$ 没有极限！实际上，若令 m 与 n 这样地增长，使得比值$\frac{m}{n^2}$趋向于一个确定的数 q，即

$$\lim \frac{m}{n^2} = q.$$

一方面我们有

$$\lim n\sin\frac{\pi}{n}=\pi.$$

另一方面又有

$$\lim m\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)=\lim m\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{n}\right)^2=\frac{q}{2}\pi^2.$$

这里，我们已经使用了等价无穷小代换：

$$1-\cos\frac{\pi}{n}\sim\frac{\pi^2}{2n^2}(n\to\infty).$$

这样一来，

$$\lim\sigma_{m,n}=2\pi\sqrt{\frac{q^2}{4}\pi^4+1}.$$

由此可见，这个极限依赖于比值 q 的大小，即依赖于 m 与 n 同时增加的方式．当 $q=0$ 时，也只在这个时候，所说的极限等于 2π，这正是中学立体几何教程中已求出的面积．

深入地考察一下最后一个等式，便能发现毛病之所在．当 $q=0$ 时，m 与 n 虽然同时趋向于无穷大，但是 m 趋于无穷大的速度远比 n^2 趋于无穷大的速度要慢，这时那些小三角形的正投影的面积可以变得要多小就有多小，或者说这些小三角形可以任意地贴近直圆柱面，这时 $\sigma_{m,n}$ 的极限确能表示直圆柱面的表面积．当 $q=+\infty$ 时，正好相反，这时这些小三角形几乎变得与直圆柱面的轴线垂直，也就是说几乎与直圆柱面的切平面垂直．

因此，我们只能放弃用内接于曲面的多面体的面积的极限来定义该曲面的面积的想法．在此，我们也不去讨论最一般的曲面的面积的定义，而是假定曲面已经有了连续可微的参数表示．

现在，设所论的曲面 Σ 有向量方程 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$，其中 $(u,v)\in\Delta$，Δ 是 $\mathbf{R}^2$ 中的一个区域．也就是说，曲面 Σ 有参数方程

$$\begin{cases}x=x(u,v),\\ y=y(u,v),\quad(u,v)\in\Delta,\\ z=z(u,v),\end{cases}$$

并且设 Δ 与曲面 Σ 上的点有一一对应关系．我们还设 $\boldsymbol{r}\in C^1(\Delta)$，并且在 Δ 上 $\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v\neq\boldsymbol{0}$；简而言之，设 Σ 是正则曲面(见 § 15.2)．

在上面所有的条件下，我们来定义曲面 Σ 的面积．用 u 曲线和 v 曲线把曲面 Σ 分成小块．每一小块在曲面的切平面上的投影的面积可以近似地表示为

$$\|\boldsymbol{r}_u\Delta u\times\boldsymbol{r}_v\Delta v\|=\|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v\|\Delta u\Delta v.$$

这样，和式

$$\sum\|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v\|\Delta u\Delta v$$

就可以当作 Σ 的面积的近似值. 加密 u 曲线和 v 曲线, 通过极限过程, 我们对曲面的面积给出如下的

定义 18.1　设正则曲面 Σ 有参数向量方程 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$, $(u,v)\in\Delta$, 我们称

$$\sigma(\Sigma)=\iint\limits_{\Delta}\|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v\|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v \tag{1}$$

为曲面 Σ 的**面积**,并且记

$$\mathrm{d}\sigma=\|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v\|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v, \tag{2}$$

称 $\mathrm{d}\sigma$ 为曲面的**面积元素**,简称**面元**.

必须作出以下三点说明:

1°　只有证明了这个定义不依赖于参数方程的选择,这个定义才是合理的. 设参数 (u,v) 经过正则映射

$$u=u(s,t),v=v(s,t) \tag{3}$$

变换成了参数 $(s,t)\in\Delta'$,映射(3) 在 Δ 与 Δ' 之间建立了一个一一对应. 由 § 15.2 的公式(14) 推知

$$\|\boldsymbol{r}_s\times\boldsymbol{r}_t\|=\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)}\right|\|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v\|,$$

再对式(1) 的右边作换元(3) ,得到

$$\sigma(\Sigma)=\iint\limits_{\Delta'}\|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v\|\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)}\right|\mathrm{d}s\mathrm{d}t=\iint\limits_{\Delta'}\|\boldsymbol{r}_s\times\boldsymbol{r}_t\|\,\mathrm{d}s\mathrm{d}t,$$

这就证明了曲面面积的定义 (1) 确实是与参数选择无关的.

2°　关于 $\boldsymbol{r}$ 是单射的假设, 是为了防止曲面上出现重点. 但是, 如果在曲面 Σ 上只有孤立的重点, 或者重点的集合对应于 Δ 中的零面积集, 公式 (1) 仍可适用.

3°　平面图形也可以看成是一张曲面. 如果 D 是 xy 平面上的点集, 有参数方程 $\boldsymbol{r}(x,y)=(x,y,0)$,其中 $(x,y)\in D$. 这时, $\boldsymbol{r}_x=(1,0,0)$, $\boldsymbol{r}_y=(0,1,0)$,从而

$$\mathrm{d}\sigma=\|\boldsymbol{r}_x\times\boldsymbol{r}_y\|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

公式(1)退化成

$$\sigma(D)=\iint\limits_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int\limits_{D}\mathrm{d}\sigma,$$

这正是 § 16.4 中平面图形面积的定义. 这说明, 一般曲面面积的定义和过去已经给出的平面图形的面积定义没有冲突.

曲面面积有下列几种表示方法. 由 § 15.2 的(8)可知

$$\sigma(\Sigma)=\iint\limits_{\Delta}\left(\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)^2+\left(\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right)^2+\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^2\right)^{1/2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v, \tag{4}$$

此外，由 § 15.2 的(10)，得到

$$\sigma(\Sigma)=\iint_{\Delta}\sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v, \tag{5}$$

其中 E，F，G 是曲面的第一基本量：

$$E=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,$$

$$F=\frac{\partial x\partial x}{\partial u\partial v}+\frac{\partial y\partial y}{\partial u\partial v}+\frac{\partial z\partial z}{\partial u\partial v},$$

$$G=\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2.$$

当曲面 Σ 是由显式

$$z=f(x,y),\ (x,y)\in D$$

表达时，我们可以将它写为参数形式

$$x=x,\ y=y,\ z=f(x,y),\ (x,y)\in D,$$

这时

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(x,y)}=-\frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial(z,x)}{\partial(x,y)}=-\frac{\partial f}{\partial y},\ \frac{\partial(x,y)}{\partial(x,y)}=1,$$

由(4)立即得到

$$\sigma(\Sigma)=\iint_{D}\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{6}$$

例 1 计算半径为 a 的球面的面积.

解 用球面参数方程来计算，就是说，令

$$x=a\sin\theta\cos\varphi,$$
$$y=a\sin\theta\sin\varphi,$$
$$z=a\cos\theta.$$

这时

$$E=a^2,\ F=0,\ G=a^2\sin^2\theta,$$

所以，面元的表示是

$$\mathrm{d}\sigma=\sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi=a^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi. \tag{7}$$

故所求的面积为

$$S=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}a^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi=2\pi a^2\int_0^{\pi}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta=4\pi a^2.\quad\square$$

例 2 计算球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 被柱面 $x^2+y^2=ax$ 所截下的面积.

解 从上题已知球面的面积元素如(7)所示.

求积分的时候，须知参数的变化区域 Δ. 将球面的参数方程代入柱面的方

程，得出 $\sin\theta=\cos\varphi=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)$，当点在第一卦限中变化时，$\theta,\varphi\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，故得出 $\theta+\varphi=\frac{\pi}{2}$，因此 Δ 是三角形区域

$$\Delta=\left\{(\theta,\varphi):\ \theta,\ \varphi\geqslant 0,\ \theta+\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}\right\}.$$

因此，所论曲面的面积为

$$4\iint_{\Delta}\mathrm{d}\sigma=4\iint_{\Delta}a^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi=4a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varphi}\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=4a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi=2a^2(\pi-2).\quad\square$$

例 3 求曲线 $y=f(x)(f(x)\geqslant 0,\ a\leqslant x\leqslant b)$ 绕 x 轴旋转所得旋转曲面的面积.

解 在旋转曲面上任取一点 $P(x,y,z)$，从图 18－3 可以看出

$$y^2+z^2=OA^2=QP^2=QR^2=f^2(x).$$

由此得旋转曲面在 z 正方向的方程为

$$z=\sqrt{f^2(x)-y^2}.$$

由此得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{f(x)f'(x)}{\sqrt{f^2(x)-y^2}},\quad\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-y}{\sqrt{f^2(x)-y^2}},$$

$$1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=f^2(x)\frac{1+(f'(x))^2}{f^2(x)-y^2}.$$

由(6)即得所求的旋转面面积为

$$S=2\iint_D f(x)\frac{\sqrt{1+(f'(x))^2}}{\sqrt{f^2(x)-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 D 是旋转面在 xy 平面上的投影区域(见图 18－4). 于是得

$$S=2\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\mathrm{d}x\int_{-f(x)}^{f(x)}\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{f^2(x)-y^2}}$$

$$=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\mathrm{d}x.\quad\square$$

如果把半径为 a 的球面看成是曲线 $y=\sqrt{a^2-x^2}(-a\leqslant x\leqslant a)$绕 x 轴旋转所得的旋转曲面，由于

$$\sqrt{1+y'^2}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

由例 3 的公式即得球面的面积为

$$S = 2\pi \int_{-a}^{a} a\,\mathrm{d}x = 4\pi a^2.$$

和例 1 算得的结果是一致的.

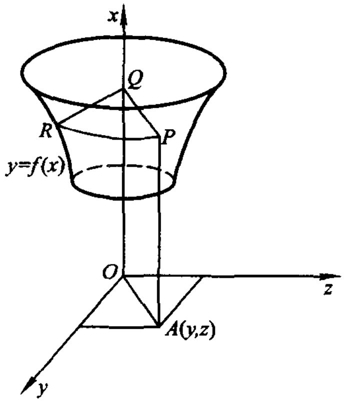


图　18－3

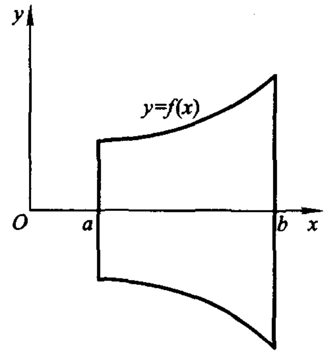


图　18－4

练习题　18.1

计算下列曲面的面积：

1. 锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被圆柱面 $x^2+y^2=2x$ 截下的部分.
2. 圆柱面 $x^2+z^2=a^2$ 被圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ 截下的部分.
3. 圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ 介乎平面 $x+z=0$ 和 $x-z=0$ 之间的部分.
4. 球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 被椭圆柱面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (0<b\leqslant a)$$

所截下的部分.

5. 马鞍面 $az=xy$ 被圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ 截下的部分.
6. 抛物面 $x^2+y^2=2az$ 被柱面 $(x^2+y^2)^2=2a^2xy$ 截下的部分.
7. 螺旋面

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta,\ 0<r<a,\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi. \\ z = h\theta, \end{cases}$$

§18.2 第一型曲面积分

设 Σ 是 $\mathbf{R}^3$ 中一张有面积的曲面，Σ 上按(面)密度 ρ 分布着某种物质，问如何求出分布在 Σ 上物质的总质量?

沿用从前用过的做法，将 Σ 分成若干小块 S_1，S_2，…，S_n，并在每一小块 S_i 上任意地取定一点 $\boldsymbol{p}_i$，这时小块 S_i 上的质量近似地等于 $\rho(\boldsymbol{p}_i)\sigma(S_i)$，于是曲面片 Σ 上的质量就近似地等于

$$\sum_{i=1}^{n}\rho(\boldsymbol{p}_i)\sigma(S_i).$$

当我们把曲面片 Σ 无限细分时，上面的和式的极限就可以定义为展布在曲面片 Σ 上物质的质量 M，即

$$M=\lim\sum_{i=1}^{n}\rho(\boldsymbol{p}_i)\sigma(S_i).$$

以上的实例引导出下面的第一型曲面积分的定义.

定义 18.2 设 Σ 是一张可求面积的曲面片，f 是定义在 Σ 上的函数，分割 π 把 Σ 分成若干更小的曲面片 S_1，S_2，…，S_n. 定义分割 π 的宽度为 $\|\pi\|=\max\{\operatorname{diam} S_i : i=1,2,\cdots,n\}$. 在每一小片 S_i 上任取一点 $\boldsymbol{p}_i$，如果和数

$$\sum_{i=1}^{n}f(\boldsymbol{p}_i)\sigma(S_i)$$

当 $\|\pi\|\to 0$ 时有有限的极限，并且其极限值不依赖点 $\boldsymbol{p}_i$ 在 S_i 上的选择，那么称这个极限值为函数 f 沿曲面 Σ 的**第一型曲面积分**，记作 $\int_{\Sigma} f\mathrm{d}\sigma$.

如果 Σ 是正则曲面，它的参数方程为 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$，$(u,v)\in\Delta$；函数 f 在 Σ 上连续，那么利用 §18.1 中关于曲面面积元素的表达式(2)，便可得出第一型曲面积分的计算公式：

$$\int_{\Sigma} f\mathrm{d}\sigma=\iint_{\Delta} f\circ\boldsymbol{r}\,\|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v\|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v. \tag{1}$$

请注意，定义 18.1 之后的头两点说明(即 1°和 2°)，对定义 18.2 显然仍起作用.

如果常值函数 $f=1$，那么它在 Σ 上的第一型曲面积分正是曲面 Σ 的面积 $\sigma(\Sigma)$.

如果曲面 Σ 可以由显表达式

$$z=\varphi(x,y),\ (x,y)\in D$$

表出，其中 D 是有面积的平面闭区域，$\varphi\in C^1(D)$，这时公式(1)变成

$$\int_{\Sigma} f\mathrm{d}\sigma = \iint_{D} f(x,y,\varphi(x,y))\sqrt{1+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{2}$$

为了方便读者，我们把计算第一型曲面积分的步骤程式化.

1° 为曲面 Σ 求得一个符合要求的参数表示 $\boldsymbol{r}$ 或者显表示 φ，定出它们的定义域 Δ 或 D;

2° 计算面元 $\mathrm{d}\sigma = \|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v\| \mathrm{d}u\mathrm{d}v$ 或者

$$\mathrm{d}\sigma = \sqrt{1+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y; \tag{3}$$

3° 计算二重积分(1)或(2).

例 1 计算积分

$$A = \int_{\Sigma} (x+y+z)\,\mathrm{d}\sigma,$$

其中 Σ 表示上半球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$，$z \geqslant 0$.

解 由于

$$A = \int_{\Sigma} x\mathrm{d}\sigma + \int_{\Sigma} y\mathrm{d}\sigma + \int_{\Sigma} z\mathrm{d}\sigma.$$

考虑到曲面的几何对称性和被积函数的奇偶性，可知上式右边的第一、第二两个积分等于零，因此

$$A = \int_{\Sigma} z\mathrm{d}\sigma,$$

由公式(3)可知

$$\mathrm{d}\sigma = \sqrt{1+\left(\frac{x}{z}\right)^2+\left(\frac{y}{z}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{a}{z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

因此

$$A = a\iint_{x^2+y^2\leqslant a^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pi a^3. \quad \square$$

例 2 计算积分

$$A = \int_{\Sigma} x^2\mathrm{d}\sigma,$$

其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$.

解 引入球面的参数表示当然可以算出 A（读者可自行练习），但是利用对称性可以几乎不必计算而得出结果. 事实上，我们有

$$\int_{\Sigma} x^2\mathrm{d}\sigma = \int_{\Sigma} y^2\mathrm{d}\sigma = \int_{\Sigma} z^2\mathrm{d}\sigma,$$

将以上三式相加，得出

$$A=\frac{1}{3}\int_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}\sigma=\frac{a^2}{3}\int_{\Sigma}\mathrm{d}\sigma$$
$$=\frac{a^2}{3}\sigma(\Sigma)=\frac{4}{3}\pi a^4.\quad\square$$

例 3　设半径为 R 的球面上均匀分布着某种质量，求其产生的引力场.

解　和 § 16.9 的例 4 一样，在空间任取一点 $\boldsymbol{p}$，我们要计算在点 $\boldsymbol{p}$ 处单位质量所受到的引力. 取球心为原点，建立坐标系. 不妨设 $\boldsymbol{p}=(0,0,l)$. 在球面上任取一点(x,y,z)，环绕着它在球面上取一块面积元素 $\mathrm{d}\sigma$，则这一小块对点 $\boldsymbol{p}$ 的引力在 z 轴的分量为

$$\frac{(z-l)\mathrm{d}\sigma}{(x^2+y^2+(z-l)^2)^{3/2}},$$

故整个球面对 $\boldsymbol{p}$ 的引力在 z 轴的分量为

$$F_z=\int_{\Sigma}\frac{z-l}{(x^2+y^2+(z-l)^2)^{3/2}}\mathrm{d}\sigma,$$

这里 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$，用球坐标

$$x=R\sin\theta\cos\varphi,\quad y=R\sin\theta\sin\varphi,\quad z=R\cos\theta,$$

这时 $E=R^2$，$F=0$，$G=R^2\sin^2\theta$，于是

$$\mathrm{d}\sigma=\sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi=R^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi.$$

这样

$$F_z=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{R\cos\theta-l}{(R^2-2Rl\cos\theta+l^2)^{3/2}}R^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$
$$=2\pi R^2\int_0^{\pi}\frac{(R\cos\theta-l)\sin\theta}{(R^2-2Rl\cos\theta+l^2)^{3/2}}\mathrm{d}\theta=2\pi R^2G(R),$$

这里

$$G(R)=\int_0^{\pi}\frac{(R\cos\theta-l)\sin\theta}{(R^2-2Rl\cos\theta+l^2)^{3/2}}\mathrm{d}\theta.$$

§ 16.9 的例 4 中已经算出

$$G(R)=\begin{cases}0, & R>l,\\ -\dfrac{2}{l^2}, & R<l.\end{cases}$$

由此可知，如果 $\boldsymbol{p}$ 点在球外，即 $l>R$，此时

$$F_z=-\frac{4\pi R^2}{l^2},$$

这相当于把球面上的全部质量集中在球心所产生的引力. 如果 $\boldsymbol{p}$ 点在球内，即 $l<R$，此时

$$F_z = 0,$$

即球面对其不产生引力．　□

练习题　18.2

1．计算下列曲面积分：

(1) $\displaystyle\iint_\Sigma \frac{d\sigma}{(1+x+y)^2}$，其中 Σ 是四面体 $x+y+z\leqslant 1, x,y,z\geqslant 0$ 的边界；

(2) $\displaystyle\iint_\Sigma |xyz|\,d\sigma, \Sigma: z = x^2+y^2, z\leqslant 1$；

(3) $\displaystyle\iint_\Sigma (xy+yz+zx)\,d\sigma, \Sigma: z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被圆柱面 $x^2+y^2=2x$ 割下的部分．

问题　18.2

1．设 Σ 为单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$，证明 Poisson 公式：

$$\iint_\Sigma f(ax+by+cz)\,d\sigma = 2\pi\int_{-1}^{1} f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,t)\,dt.$$

2．设 $\Sigma(t)$ 是平面 $x+y+z=t$ 被球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 截下的部分．设

$$F(x,y,z) = 1-(x^2+y^2+z^2),$$

求证：对于 $|t|\leqslant\sqrt{3}$ 时，有

$$\iint_{\Sigma(t)} F(x,y,z)\,d\sigma = \frac{\pi}{18}(3-t^2)^2.$$

3．设 $f(t)$ 在 $|t|<\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ 上连续，证明

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1} f\left(\frac{a+by+cz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)dx\,dy\,dz = \frac{2}{3}\pi\int_{-1}^{1} f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,t)\,dt.$$

§ 18.3　第二型曲面积分

第二型曲面积分与曲面的定向有关，所以，我们必须首先讲述定向曲面的概念．

我们指出，任何正则曲面片都是**可定向**的．设

$$\Sigma:\ \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v),\ (u,v)\in\Delta$$

是一块正则曲面片．因为 $\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v\neq\boldsymbol{0}$在 Δ 上处处成立，所以在曲面 Σ 的各点处有确定的法向量．向量

$$\pm\frac{\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v}{\|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v\|}$$

都是单位法向量．我们可以指定其中的任何一个作为 Σ 的**正方向**，例如说，指定带正号的那一个为 Σ 的正方向．当参数(u,v)在 Δ 上连续变化时，这指定的单位法向量在 Σ 上也连续变化，不会突然转到相反的方向上去．我们约定把曲面 Σ 的正法线指向的一侧叫做Σ 的**正侧**，相反的那一侧叫做**负侧**．凡是能明确地区分正、负两侧的曲面，叫做**双侧曲面**．所以说，正则曲面一定是双侧曲面，我们说它是**可定向的**．例如，平面(或它的一部分)、椭球面(或它的一部分)等等，都是可定向的，也就是双侧曲面．

不可定向的曲面的一个著名例子叫做 Möbius 带．设想有一张矩形纸带，见图 18－5，记作 ABB_1A_1，用两手捏着它的两头，然后像拧麻花一样地把它扭转过来，再把线段 AB 与线段A_1B_1 粘贴起来，但要使得 A 与B_1 黏合而 B 与A_1 黏合，这样得到的曲面就叫做 Möbius 带，见图 18－6，把这张曲面记作 M.

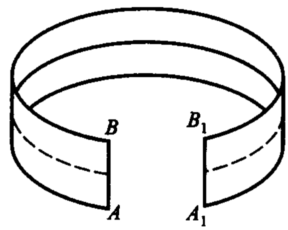


图　18－5

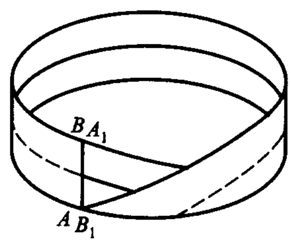


图　18－6

在 M 上任取一点P，在 P 上指定一个单位法向量，当点 P 在M 上连续变化时，这个单位法向量也连续地改变，当点 P 在 M 上扫过一圈仍回到原来的出发点时，这时的单位法向量的方向正好与最初的单位法向量的方向相反！换一个更加通俗的说法，那就是，有一个人提着油漆桶来刷 Möbius 带，那么他可以把 M 的所有部分全都刷上油漆，而无需通过曲面的边界！这就说明 Möbius 带是不可定向的．

第二型曲面积分，只能是在双侧曲面上定义．

我们常常会遇到由若干块连续可微的曲面片拼接而成的曲面，例如，立方体的表面就是这样的曲面．如何给“拼接曲面”定向，需要作进一步的说明．

首先，拼接曲面系由有限多块曲面片拼成，其中任何两块至多只相交于边

界上的一段曲线，任意三块(或更多的块)至多只能相交于边界上的一个点．其次，为了给整块曲面定向，每一块小曲面片应是可定向的．一旦其中的一块曲面片的正向确定之后，它的边界曲线也随之定了方向，规则是：当一个人站在正侧沿边界正向绕行时，曲面片的内部应在人的左手边，只有在曲面的定向与它的边界曲线的定向符合这一规则时，称它们的定向是**协调的**．如果两个有一段公共边界的曲面片，它们各自的定向使得在它们的一段公共边界上的定向正好相反，那么这两块曲面片的定向也称为是**协调的**．设 Σ 是一张拼接曲面，如果它的任何两块有一段公共边界的曲面片，都有协调的定向，这时我们说拼接曲面 Σ 是可定向的．我们还约定，把协调选择的各块曲面片上的正向，当作 Σ 的正向．

例 1 考察一个立方体的表面，这是一个封闭的拼接曲面，由 6 个正方形组成．在每一个正方形上，我们规定朝外的法线方向为其正向，那么每一个正方形的边界的方向也就随之决定了，即我们从外部看上去，它是依反时针方向绕行的(图 18-7)．

由图看出，这张拼接曲面是可定向的． □

例 2 设 ABB_1A_1 是一个矩形，线段 CD 将它分成两个小矩形．按照图 18-8 将每一个小矩形定向，再把 AB 和 A_1B_1 黏合起来，形成一张拼接曲面．如果将 A 和 A_1 黏合、B 同 B_1 黏合，得到一张柱面，它有协调的定向，所以是双侧曲面．但是，如果将 A 同 B_1 黏合、B 同 A_1 黏合，就成了 Möbius 带，它不是双侧曲面，事实上，它有不协调的定向． □

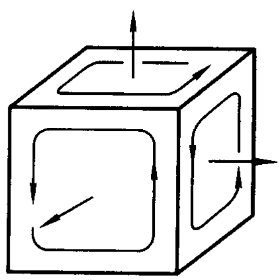


图 18-7

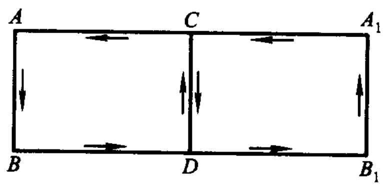


图 18-8

现在开始讨论第二型曲面积分．

设区域 $D\subset\mathbf{R}^3$，$\boldsymbol{F}:D\to\mathbf{R}^3$，这就是说，在区域 D 上定义了一个向量场，姑且设想 $\boldsymbol{F}$ 是流速场．又设 $\Sigma\subset D$ 是一张有面积又可定向的曲面片，我们希望计算流速场 $\boldsymbol{F}$ 在单位时间内从曲面 Σ 的一侧流向另一侧的流量．由于流速无论大小还是方向都随着点在 Σ 上的变化而变化，Σ 又是弯曲的，所以只有用曲面微元的方法才能解决这个问题．

为了计算流量，应当给 Σ 定向．我们任意选定 Σ 的正侧，最后算出的流

量的正负号与指定曲面 Σ 的哪一侧为正侧有关. 如果改变 Σ 的定向，最后的结果将相差一个符号. 从负侧流向正侧的流量算作正的，而从正侧流向负侧的流量算作负的.

我们从曲面 Σ 上任取一块微小的面元 $\mathrm{d}\sigma$，并把这面元的指向正侧的单位法向量记作 $\boldsymbol{n}$. 于是，在单位时间内，通过这个曲面微元的流体的总量为 $(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n})\mathrm{d}\sigma$. 在图 18－9 中，这正好是那个斜放着的柱体的体积. 因此可见，在单位时间内，通过曲面 Σ 的流体的总量为

$$\int_{\Sigma}(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n})\,\mathrm{d}\sigma. \tag{1}$$

令 $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{n}\mathrm{d}\sigma$，称之为**有向面元**，它的模长为 $\mathrm{d}\sigma$，它的方向与正法向量的方向一致. 这样，表达式(1)可写为

$$\int_{\Sigma}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}. \tag{2}$$

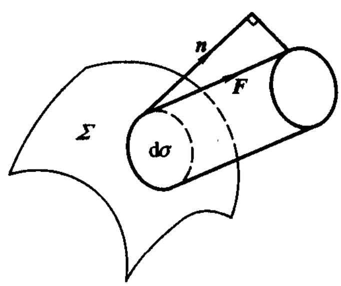


图 18－9

表达式(2)称为 $\boldsymbol{F}$ 在有向曲面 Σ 上的**第二型曲面积分**，Σ 的定向体现在 $\boldsymbol{n}$ 与 $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$ 之中.

第二型曲面积分还有其他的表达方式. 设 $\boldsymbol{F}=(P,Q,R)$，正法向量

$$\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma),$$

其中 α，β，γ 是 $\boldsymbol{n}$ 的方向角，即分别是 $\boldsymbol{n}$ 与 x 轴，y 轴和 z 轴的正向的夹角. 因此(1)也可以表示为

$$\int_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,\mathrm{d}\sigma. \tag{3}$$

再置

$$\begin{aligned}\mathrm{d}y\mathrm{d}z&=\cos\alpha\,\mathrm{d}\sigma,\\ \mathrm{d}z\mathrm{d}x&=\cos\beta\,\mathrm{d}\sigma,\\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\cos\gamma\,\mathrm{d}\sigma.\end{aligned} \tag{4}$$

那么(3)式可以改写为

$$\iint_{\Sigma}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{5}$$

(5)式是人们普遍使用的第二型曲面积分的记法.

我们来看(4)式中的最后那个等式，即 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\cos\gamma\,\mathrm{d}\sigma$，它表明：$\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 代表面元 $\mathrm{d}\sigma$ 在 xy 平面上的投影，这个投影的面积是可正可负的，全看 $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$ 上的法向量与 z 轴正向的夹角是小于$\frac{\pi}{2}$还是大于$\frac{\pi}{2}$而定. 对(4)式中其他两个等式，也可以作出类似的解释.

现在来谈谈第二型曲面积分的计算．请注意，表达式(1)与(3)已经是第一型曲面积分，如何计算这种积分，在§18.2中已经学习过．我们把这些公式写得更具体一点，即把它们归结为二重积分来计算．

考察正则曲面 Σ：

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v),\ (u,v)\in\Delta,$$

并设 $\boldsymbol{r}$ 实现了 Σ 与 Δ 之间的一一对应．这时，曲面 Σ 的单位法向量是

$$\boldsymbol{n}=\pm\frac{\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v}{\|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v\|},\tag{6}$$

选择正、负号，应使得(6)式的右边与已经指定的 Σ 的定向一致．在§18.1中，我们已有

$$\mathrm{d}\sigma=\|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v\|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

所以

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{n}\mathrm{d}\sigma=\pm(\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v,\tag{7}$$

从而(1)与(2)就变成了

$$\pm\iint_{\Delta}\boldsymbol{F}\circ\boldsymbol{r}\cdot(\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v.\tag{8}$$

更进一步，若把(8)式中的向量三重积(即混合积)展开，得到

$$\pm\iint_{\Delta}\left(P\circ\boldsymbol{r}\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}+Q\circ\boldsymbol{r}\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}+R\circ\boldsymbol{r}\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v.\tag{9}$$

利用行列式，上式成为

$$\pm\iint_{\Delta}\begin{vmatrix}P\circ\boldsymbol{r} & Q\circ\boldsymbol{r} & R\circ\boldsymbol{r}\\ \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u}\\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v}\end{vmatrix}\mathrm{d}u\mathrm{d}v.\tag{10}$$

如果曲面 Σ 是由显式表达的，即

$$\Sigma:\ z=f(x,y),\ (x,y)\in D,$$

那么

$$\iint_{\Sigma}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\pm\iint_{D}\left(-P\frac{\partial f}{\partial x}-Q\frac{\partial f}{\partial y}+R\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\tag{11}$$

上式的右边是展布在 D 上的二重积分，右边的正负号是要根据曲面的定向来决定的．例如说，如果把曲面 Σ 的上侧为正侧，即要求正法向量与 z 轴的正向夹成锐角，因此 $\cos\gamma>0$，这时应在(10)式的右边取正号．

在(11)式中，如果 $P=Q=0$，公式将变得特别简单：

$$\iint_{\Sigma} R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pm \iint_{D} R(x,y,f(x,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{12}$$

看几个例子.

例 3 计算积分

$$A = \iint_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 Σ 是三角形 $\{(x,y,z):\ x,\ y,\ z \geqslant 0,\ x+y+z=1\}$，法向量与$(1,1,1)$同方向.

解 我们给出两种解法.

1° 先算

$$\iint_{\Sigma} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

按照公式(12)，这个积分等于二重积分

$$\begin{aligned}\iint_{\substack{x\geqslant 0,y\geqslant 0\\ x+y\leqslant 1}} (1-x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{1-x}(1-x-y)\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 (1-x)^2\mathrm{d}x = \frac{1}{6}(1-x)^3\Big|_1^0 = \frac{1}{6},\end{aligned}$$

对称地

$$\int_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_{\Sigma} y\mathrm{d}z\mathrm{d}x = \frac{1}{6},$$

所以 $A = \frac{1}{2}$.

2° 曲面 Σ 的单位法向量是 $\boldsymbol{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$. 令 $\boldsymbol{F} = (x,y,z)$，那么

$$\begin{aligned}A &= \int_{\Sigma} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{\sqrt{3}}\int_{\Sigma}(x+y+z)\mathrm{d}\sigma \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\int_{\Sigma}\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{\sqrt{3}}\sigma(\Sigma).\end{aligned}$$

由于 Σ 是一个边长为$\sqrt{2}$的等边三角形，所以 $\sigma(\Sigma) = \frac{\sqrt{3}}{2}$，因此 $A = \frac{1}{2}$. □

例 4 曲面 Σ 是中心在原点、半径为 a 的球面，正向是外法线方向，计算积分

$$A = \iint_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

解 这时 $\boldsymbol{F} = (x,y,z)$，Σ 的单位法向量是

$$\boldsymbol{n} = \left(\frac{x}{a},\ \frac{y}{a},\ \frac{z}{a}\right),$$

因此

$$A = \int_{\Sigma} (\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}) \mathrm{d}\sigma = \frac{1}{a} \int_{\Sigma} (x^2 + y^2 + z^2) \mathrm{d}\sigma$$

$$= a \int_{\Sigma} \mathrm{d}\sigma = a\sigma(\Sigma) = 4\pi a^3. \quad \square$$

例 5 设有流速场 $\boldsymbol{F} = (yz, zx, xy)$，曲面 Σ 是圆柱体 $x^2 + y^2 \leqslant a^2$，$0 \leqslant z \leqslant h$ 的表面. 求流速场流出 Σ 的流量.

解 由于题目要求的是求“流出”的流量，所以，我们可设 Σ 的外法线方向为正向. 我们的曲面是一拼接曲面，由三块曲面组成：记圆柱面的那部分为 Σ_1，下底和上底分别记为 Σ_2 和 Σ_3.

在 Σ_1 上，单位法向量是 $\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}, 0\right)$，因此

$$\int_{\Sigma_1} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}\sigma = \frac{2}{a} \int_{\Sigma_1} xyz \, \mathrm{d}\sigma = 0,$$

这是因为，对于固定的 y 和 z，表达式 xyz 是 x 的奇函数，而 Σ_1 是关于 yz 平面对称的.

在 Σ_2 上，$\boldsymbol{n} = (0,0,-1)$，$\boldsymbol{F} = (0,0,xy)$，因此

$$\int_{\Sigma_2} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}\sigma = -\int_{\Sigma_2} xy \mathrm{d}\sigma = 0,$$

理由同前面所说的类似.

在 Σ_3 上，$\boldsymbol{n} = (0,0,1)$，$\boldsymbol{F} = (hy, hx, xy)$，我们有

$$\int_{\Sigma_3} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}\sigma = \int_{\Sigma_3} xy \mathrm{d}\sigma = 0.$$

所以，通过 Σ 的总流量等于零. $\square$

例 6 计算积分

$$\iint_{\Sigma} x^3 \mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^3 \mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^3 \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

这里 Σ 是椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 的外侧.

解 我们首先计算

$$\iint_{\Sigma} z^3 \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

引入椭球面的参数表示

$$\begin{cases} x = a\sin\theta\cos\varphi, \\ y = b\sin\theta\sin\varphi, \\ z = c\cos\theta, \end{cases}$$

这里 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$，$0\leqslant\varphi\leqslant2\pi$. 这时，我们有

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\theta,\varphi)}=\begin{vmatrix} a\cos\theta\cos\varphi & -a\sin\theta\sin\varphi \\ b\cos\theta\sin\varphi & b\sin\theta\cos\varphi \end{vmatrix}=ab\cos\theta\sin\theta,$$

按照公式(9)，得出

$$\iint_\Sigma z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y=abc^3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^\pi\cos^4\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=2\pi abc^3\int_0^\pi\cos^4\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta=\frac{4}{5}\pi abc^3.$$

对称地，有

$$\iint_\Sigma x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{4}{5}\pi a^3bc,$$

$$\iint_\Sigma y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\frac{4}{5}\pi ab^3c.$$

最后得出

$$A=\frac{4}{5}\pi abc\,(a^2+b^2+c^2).\quad\square$$

例7 计算积分

$$A=\iint_\Sigma x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

Σ 是球面$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ 的外侧.

解 先计算积分

$$\iint_\Sigma z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

用平面 $z=c$ 把 Σ 分成上、下两个半球面 Σ_1 和 Σ_2，曲面 Σ_1 和 Σ_2 都是定向曲面：Σ_1 的正法线与 z 轴的正向夹成锐角，而 Σ_2 的正法线与 z 轴的正向夹成钝角，设在 Σ_i 上，球面的方程为 $z=z_i(x,y)$，$i=1,2$，设 D 为 xy 平面上的圆盘$(x-a)^2+(y-b)^2\leqslant R^2$，依公式(12)，得出

$$\iint_\Sigma z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\Sigma_1}z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{\Sigma_2}z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_D(z_1^2-z_2^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_D(z_1+z_2)(z_1-z_2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

注意到 $z_1+z_2=2c$，所以上式等于

$$2c\iint_D(z_1-z_2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2c\times\text{球的体积}.$$

由对称性，知

$$A=2(a+b+c)\times \text{球的体积}$$

$$=2(a+b+c)\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{8}{3}(a+b+c)\pi R^3.\quad \square$$

练习题 18.3

1. 计算下列第二型曲面积分：

(1) $\iint\limits_{\Sigma} x^4\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^4\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^4\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $\Sigma: x^2+y^2+z^2=a^2$，内侧；

(2) $\iint\limits_{\Sigma} xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $\Sigma: x^2+y^2+z^2=a^2$，外侧；

(3) $\iint\limits_{\Sigma} f(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+g(y)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+h(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $\Sigma:[0,a]\times[0,b]\times[0,c]$ 的边界，外侧；

(4) $\iint\limits_{\Sigma} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $\Sigma:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$，外侧；

(5) $\iint\limits_{\Sigma}(y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z-x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $\Sigma: z=\sqrt{x^2+y^2}$，$z\leqslant h$，外侧.

2. 给定流速场 $\boldsymbol{F}=(y,z,x)$，封闭曲面 $x^2+y^2=R^2$，$z=0$，$z=h$. 计算 $\boldsymbol{F}$ 流向曲面之外的流量.

3. 设 Σ：$z=f(x,y)$，$(x,y)\in D$，法向量向上，求证：

(1) $\iint\limits_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z=-\iint\limits_{D} P(x,y,f(x,y))\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$；

(2) $\iint\limits_{\Sigma} Q\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x=-\iint\limits_{D} Q(x,y,f(x,y))\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

§ 18.4 Gauss 公式和 Stokes 公式

利用 Gauss 公式，可以把沿三维区域边界的第二型曲面积分转换成为展布在这区域上的三重积分. 像在 § 17.3 中对 Green 公式所做的处理一样，我们先通过对几种较简单情形的分析，再对一般的情形作出结论.

考察 $\mathbf{R}^3$ 中的闭区域

$$\Omega=\{(x,y,z):\ \varphi(x,y)\leqslant z\leqslant\psi(x,y),\ (x,y)\in D\},$$

其中 D 是 xy 平面上的闭区域(图 18-10). 为了行文的简短，我们称这样的区域为**丙类区域**.

设函数 $R:\Omega\to\mathbf{R}$ 连续且有连续的一阶偏导数. 取$\partial\Omega$ 的外侧为曲面$\partial\Omega$ 定向，计算第二型曲面积分

$$\iint\limits_{\partial\Omega}R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\tag{1}$$

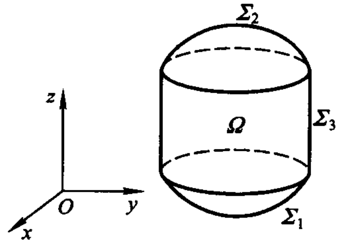


图　18-10

这时$\partial\Omega$ 可以看成是一个拼接曲面. 下底 Σ_1 由方程 $z=\varphi(x,y)$，$(x,y)\in D$ 表示，法线向下；上盖 Σ_2 由方程 $z=\psi(x,y)$，$(x,y)\in D$ 表示，法线向上；还有一个是母线平行于 z 轴的柱面，记作 Σ_3，法线平行于 xy 平面，方向向着体外. 这样便有

$$\iint\limits_{\partial\Omega}R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\Sigma_1}R\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{\Sigma_2}R\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{\Sigma_3}R\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

因为在 Σ_3 上，面元 $\mathrm{d}\sigma$ 在 xy 平面上的投影等于零，因此，最后一个积分等于零. 于是

$$\iint\limits_{\partial\Omega}R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\Sigma_1}R\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{\Sigma_2}R\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\tag{2}$$

根据 § 18.3 中的公式(12)，我们有

$$\iint\limits_{\Sigma_1}R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint\limits_{D}R(x,y,\varphi(x,y))\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$\iint\limits_{\Sigma_2}R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D}R(x,y,\psi(x,y))\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

由(2)得出

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\partial\Omega}R\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\iint\limits_{D}\big(R(x,y,\psi(x,y))-R(x,y,\varphi(x,y))\big)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint\limits_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)}\frac{\partial R}{\partial z}(x,y,z)\,\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

如果把最后的表达式看成是从一个三重积分化归的累次积分，我们便得出

$$\iint\limits_{\partial\Omega}R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint\limits_{\Omega}\frac{\partial R}{\partial z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.\tag{3}$$

类似地，我们可以定义甲类区域. 如果闭区域 Ω 能够表示为

$$\Omega=\{(x,y,z):\ \varphi(y,z)\leqslant x\leqslant\psi(y,z),\ (y,z)\in D\},$$

其中 D 为 yz 平面上的闭区域，那么称 Ω 是**甲类区域**. 这时我们有：

$$\iint_{\partial\Omega} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z. \tag{4}$$

而对于**乙类区域**

$$\Omega = \{(x,y,z):\ \varphi(x,z) \leqslant y \leqslant \psi(x,z),\ (x,z)\in D\},$$

这里 D 是 zx 平面上的一个闭区域，则有

$$\iint_{\partial\Omega} Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x = \iiint_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z. \tag{5}$$

设 Ω 是 $\mathbf{R}^3$ 中的一个有界闭区域，它可以同时分拆为有限个甲类区域、乙类区域和丙类区域的并，同一类中的任何两个区域，至多有公共的边界，那么像我们在讨论 Green 公式时所作过的推理一样，这时公式(3)，(4)和(5)都能成立，把这三个等式相加，我们得出

$$\iint_{\partial\Omega} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

这样，我们已经证明了下面的

定理 18.1(**Gauss 公式**) 设 Ω 是 $\mathbf{R}^3$ 中的有界闭区域，它可以同时分拆为有限个甲类区域、乙类区域和丙类区域的并，同一类中任何两个区域至多只有公共的边界. 如果函数 P，Q 和 R 都在 Ω 上连续可微，那么便有

$$\begin{aligned}&\iint_{\partial\Omega} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= \iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.\end{aligned} \tag{6}$$

这里 $\partial\Omega$ 表示 Ω 的边界，$\partial\Omega$ 按外法线方向来定向. □

我们通过若干例子来说明 Gauss 公式的应用.

例 1 计算积分

$$A = \iint_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 的外侧(见 § 18.3 例 4).

解 用 Ω 来记 Σ 所包围的球体，由(6)

$$\begin{aligned}A &= \iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\ &= 3\int_{\Omega}\mathrm{d}\mu = 3\mu(\Omega) = 4\pi a^3.\end{aligned}$$ □

例 2 计算积分

$$A = \iint_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 $\Sigma = \{(x,y,z):\ x,\ y,\ z \geqslant 0,\ x+y+z=1\}$，其法向量与(1,1,1)同向(见§18.3 例 3).

解 这不是一张封闭的曲面. 我们补上它同三个坐标轴截下的三块三角形，作成一个四面体 Ω. 由于在每一个坐标平面上，被积表达式 $x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$，所以，三块补上去的曲面对曲面积分没有贡献，因此

$$A = \iint_{\partial\Omega} x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

利用 Gauss 公式，得出

$$A = 3\int_{\Omega}\mathrm{d}\mu = 3\mu(\Omega).$$

由于这个四面体体积 $\mu(\Omega) = \frac{1}{6}$，我们得到 $A = \frac{1}{2}$. □

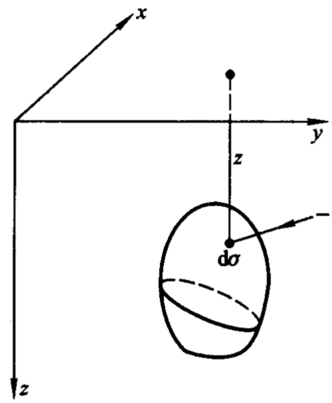


图 18-11

例 3 证明 Archimedes 原理：物体全部浸入液体中所受的浮力等于与物体同体积的液体之重.

证明 取坐标系如图 18-11. 设液体的密度是 ρ，那么物体表面一小块面积 $\mathrm{d}\sigma$ 所受到的压力大小是 $\rho gz\mathrm{d}\sigma$，方向是 $-\boldsymbol{n}$，这里 $\boldsymbol{n}$ 是物体表面的单位外法向量. 设 $\boldsymbol{n} = \cos\alpha\boldsymbol{i} + \cos\beta\boldsymbol{j} + \cos\gamma\boldsymbol{k}$，作为物体 V 的表面的曲面记为 Σ，那么整个物体受到的压力 $\boldsymbol{F}$ 是

$$-\int_{\Sigma}\rho gz\cos\alpha\,\mathrm{d}\sigma\boldsymbol{i} - \int_{\Sigma}\rho gz\cos\beta\,\mathrm{d}\sigma\boldsymbol{j} - \int_{\Sigma}\rho gz\cos\gamma\,\mathrm{d}\sigma\boldsymbol{k}.$$

由 Gauss 定理，

$$\int_{\Sigma}\rho gz\cos\alpha\,\mathrm{d}\sigma = \iiint_{V}\frac{\partial(\rho gz)}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0,$$

$$\int_{\Sigma}\rho gz\cos\beta\,\mathrm{d}\sigma = \iiint_{V}\frac{\partial(\rho gz)}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0,$$

$$\int_{\Sigma}\rho gz\cos\gamma\,\mathrm{d}\sigma = \iiint_{V}\frac{\partial(\rho gz)}{\partial z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \rho g\iiint_{V}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \rho g\mu(V).$$

由此即得

$$\boldsymbol{F} = -\rho g\mu(V)\boldsymbol{k}.$$

这就是要证明的. □

利用 Green 公式，可以通过第二型曲线积分来表示闭曲线所围成的图形的面积. 同样，利用 Gauss 公式，可以通过第二型曲面积分来表示闭曲面所围成

的立体的体积．这是因为

$$\iint_{\partial\Omega} x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 3\int_{\Omega}\mathrm{d}\mu = 3\mu(\Omega),$$

所以

$$\mu(\Omega) = \frac{1}{3}\iint_{\partial\Omega} x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{7}$$

特别地，如果$\partial\Omega$ 有正则的参数方程

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,v) = (x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v)),\quad (u,v)\in\Delta.$$

那么，由公式(7)和前节的公式(10)，可得

$$\mu(\Omega) = \pm\frac{1}{3}\iint_{\Delta}\begin{vmatrix} x & y & z \\ \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v}\end{vmatrix}\mathrm{d}u\mathrm{d}v. \tag{8}$$

在利用公式(8)计算体积的时候，不必费心去选择曲面的定向，这是因为体积总是正数，如果算出(8)式右边的积分为负数，把负号去掉就可以了．

现在，我们来转向 Stokes 公式．

Stokes 公式把沿一块曲面的边界的第二型曲线积分同展布在这块曲面上的第二型曲面积分联系起来．在某种意义上，可以认为 Stokes 公式是 Green 公式的推广．证明 Stokes 公式的时候，要用到 Green 公式．

设 Σ 是一块正则参数曲面片：

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,v),\quad (u,v)\in\Delta.$$

设 $\boldsymbol{r}(u,v)$二阶连续可导，函数 $P(x,y,z)$在包含 Σ 的某个三维区域上连续可导，我们来计算第二型曲线积分

$$\int_{\partial\Sigma} P(x,y,z)\,\mathrm{d}x.$$

设$\partial\Delta$ 的参数方程是$\boldsymbol{f}(t) = (u(t), v(t))$, $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$,并且参数 t 的增长方向对应着$\partial\Delta$ 的正向．这样,$\partial\Sigma$ 的参数方程是$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}\circ\boldsymbol{f}(t)$，$\alpha\leqslant t\leqslant\beta$，因此

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Sigma} P(x,y,z)\,\mathrm{d}x &= \int_{\alpha}^{\beta} P\circ\boldsymbol{r}\circ\boldsymbol{f}(t)\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} P\circ\boldsymbol{r}\circ\boldsymbol{f}(t)\left(\frac{\partial x}{\partial u}u'(t) + \frac{\partial x}{\partial v}v'(t)\right)\mathrm{d}t \\ &= \int_{\partial\Delta} P\circ\boldsymbol{r}\,\frac{\partial x}{\partial u}\mathrm{d}u + P\circ\boldsymbol{r}\,\frac{\partial x}{\partial v}\mathrm{d}v.\end{aligned}$$

对最后的那个平面第二型曲线积分应用 Green 公式，得到

$$\int_{\partial\Sigma} P\mathrm{d}x = \iint_{\Delta}\left(\frac{\partial}{\partial u}\left(P\circ\boldsymbol{r}\,\frac{\partial x}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(P\circ\boldsymbol{r}\,\frac{\partial x}{\partial u}\right)\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v. \tag{9}$$

计算得

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(P\circ\boldsymbol{r}\frac{\partial x}{\partial v}\right)=\left(\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}\right)\frac{\partial x}{\partial v}+P\circ\boldsymbol{r}\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v},$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(P\circ\boldsymbol{r}\frac{\partial x}{\partial u}\right)=\left(\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial x}{\partial u}+P\circ\boldsymbol{r}\frac{\partial^2 x}{\partial v\partial u},$$

将以上二式相减，得出

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial u}\left(P\circ\boldsymbol{r}\frac{\partial x}{\partial v}\right)-\frac{\partial}{\partial v}\left(P\circ\boldsymbol{r}\frac{\partial x}{\partial u}\right)\\&=\frac{\partial P}{\partial z}\circ\boldsymbol{r}\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}-\frac{\partial P}{\partial y}\circ\boldsymbol{r}\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}.\end{aligned}$$

代入(9)，得出

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Sigma}P\mathrm{d}x&=\iint_{\Delta}\left(\frac{\partial P}{\partial z}\circ\boldsymbol{r}\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}-\frac{\partial P}{\partial y}\circ\boldsymbol{r}\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\&=\iint_{\Sigma}\frac{\partial P}{\partial z}\mathrm{d}z\mathrm{d}x-\iint_{\Sigma}\frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

即

$$\int_{\partial\Sigma}P(x,y,z)\,\mathrm{d}x=\iint_{\Sigma}\frac{\partial P}{\partial z}\mathrm{d}z\mathrm{d}x-\frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

类似地，还有其他两个公式

$$\int_{\partial\Sigma}Q(x,y,z)\,\mathrm{d}y=\iint_{\Sigma}\frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\frac{\partial Q}{\partial z}\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

$$\int_{\partial\Sigma}R(x,y,z)\,\mathrm{d}z=\iint_{\Sigma}\frac{\partial R}{\partial y}\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\frac{\partial R}{\partial x}\mathrm{d}z\mathrm{d}x,$$

条件是 Q 和 R 在包含曲面 Σ 的某一个三维区域上连续可导.

把以上三个等式双方相加，就得到

定理 18.2(Stokes 公式) 设 Σ 是由有限块二阶连续可微的正则曲面拼接而成的定向曲面. 如果 P, Q 和 R 是定义在 Σ 上的连续可微函数，那么

$$\begin{aligned}&\int_{\partial\Sigma}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z\\&=\iint_{\Sigma}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\end{aligned}\tag{10}$$

这里 $\partial\Sigma$ 表示曲面 Σ 的边界，曲面 Σ 的定向与其边界曲线 $\partial\Sigma$ 的定向应当是协调的. □

用行列式的记法，Stokes 公式可以表示为

$$\int_{\partial\Sigma}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\mathrm{d}z&\mathrm{d}z\mathrm{d}x&\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\\dfrac{\partial}{\partial x}&\dfrac{\partial}{\partial y}&\dfrac{\partial}{\partial z}\\P&Q&R\end{vmatrix},\tag{11}$$

也可表示为

$$\int_{\partial\Sigma} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z = \int_{\Sigma} \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \mathrm{d}\sigma, \tag{12}$$

其中$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$表示曲面$\Sigma$的正单位法向量.公式(11)和(12)，方便人们的记忆.

例 3　设有向曲面Σ为

$$x+y+z=1,\quad x,y,z\geqslant 0,$$

其法线与$(1,1,1)$同向,求力场$\boldsymbol{F}=(y^2,z^2,x^2)$绕$\Sigma$的正向边界$\partial\Sigma$一周所做的功.

解　这时，Σ的正法向量是

$$\boldsymbol{n}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1).$$

按公式(12)，我们有

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Sigma}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{p} &= \frac{1}{\sqrt{3}}\int_{\Sigma}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y^2 & z^2 & x^2 \end{vmatrix}\mathrm{d}\sigma \\ &= -\frac{2}{\sqrt{3}}\int_{\Sigma}(x+y+z)\,\mathrm{d}\sigma = -\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma(\Sigma) \\ &= -\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{2} = -1.\quad\square\end{aligned}$$

例 4　计算曲线积分

$$I=\int_{\Gamma}(y^2+z^2)\,\mathrm{d}x+(z^2+x^2)\,\mathrm{d}y+(x^2+y^2)\,\mathrm{d}z,$$

Γ为曲线$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=2ax\\ x^2+y^2=2bx\end{cases}$，$z\geqslant 0$，$0<b<a$. 眼睛从点$(b,0,0)$看去，$\Gamma$是反时针方向绕行的.

解　用Σ记曲线Γ在球面

$$x^2+y^2+z^2=2ax,\quad z\geqslant 0$$

上围出的那块曲面，由公式(12)即得

$$I=\int_{\Gamma}(y^2+z^2)\,\mathrm{d}x+(z^2+x^2)\,\mathrm{d}y+(x^2+y^2)\,\mathrm{d}z$$

$$= \frac{1}{a}\int_{\Sigma}\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y^2+z^2 & z^2+x^2 & x^2+y^2 \end{vmatrix} d\sigma$$

$$= \frac{2}{a}\int_{\Sigma}\{(y-z)(x-a)+(z-x)y+(x-y)z\}d\sigma$$

$$= 2\int_{\Sigma}(z-y)\,d\sigma$$

$$= 2\int_{\Sigma}z\,d\sigma.$$

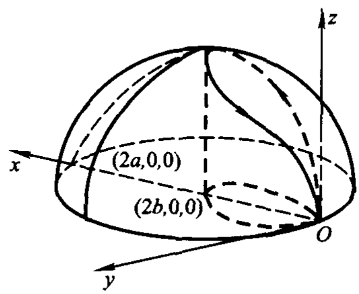


图 18－12

由于 Σ 关于坐标平面 xOz 对称，我们已经使用了 $\int_{\Sigma} y\,d\sigma = 0$ 这一事实. Σ 的方程可以写成

$$z = \sqrt{a^2-(x-a)^2-y^2},$$

所以

$$d\sigma = \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy = \frac{a}{\sqrt{a^2-(x-a)^2-y^2}}dxdy = \frac{a}{z}dxdy.$$

注意到 Σ 在 xOy 平面上的投影区域 D 就是圆盘 $(x-b)^2+y^2=b^2$，它的面积为 πb^2，因而得

$$I = 2\iint_{D} z\cdot\frac{a}{z}dxdy = 2a\sigma(D) = 2\pi ab^2. \quad \square$$

练习题 18.4

1. 利用 Gauss 公式计算下列积分:

(1) $\iint_{\Sigma} x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy$, Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$, 方向朝外;

(2) $\iint_{\Sigma} xy\,dydz + yz\,dzdx + zx\,dxdy$, Σ 是由四张平面 $x=0, y=0, z=0$ 和 $x+y+z=1$ 围成的封闭曲面, 方向朝外;

(3) $\iint_{\Sigma}(x-y)dydz + (y-z)dzdx + (z-x)dxdy$, Σ 是曲面 $z=x^2+y^2$ $(z\leqslant 1)$, 方向朝下;

(4) $\iint_{\Sigma} x^2\,dydz + y^2\,dzdx + z^2\,dxdy$, Σ 是曲面 $z^2=x^2+y^2$ $(0\leqslant z\leqslant 1)$, 方向

朝下.

2. 设 Ω 是一闭域，向量 $\boldsymbol{n}$ 是 $\partial\Omega$ 的单位外法向量，$\boldsymbol{e}$ 是一个固定的向量. 求证：

$$\int_{\partial\Omega}\cos(\boldsymbol{e},\boldsymbol{n})\,\mathrm{d}\sigma=0.$$

3. 设 Ω 为一闭区域，向量 $\boldsymbol{n}$ 是 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 的单位外法向量，点 $(a,b,c)\overline{\in}\partial\Omega$. 令 $\boldsymbol{p}=(x-a,y-b,z-c)$ 且 $p=\|\boldsymbol{p}\|$. 求证：

$$\iiint_{\Omega}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{p}=\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}\cos(\boldsymbol{p},\boldsymbol{n})\,\mathrm{d}\sigma.$$

4. 利用 Stokes 公式计算下列积分：

(1) $\int_{\Gamma}y\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}y+x\,\mathrm{d}z$，$\Gamma$ 为圆周 $x^2+y^2+z^2=a^2, x+y+z=0$，从第一卦限看去，Γ 是反时针方向绕行的；

(2) $\int_{\Gamma}(y+z)\,\mathrm{d}x+(z+x)\,\mathrm{d}y+(x+y)\,\mathrm{d}z$，$\Gamma$ 为椭圆 $x^2+y^2=2y, y=z$，眼睛从点 $(0,1,0)$ 向 Γ 看去，Γ 是反时针方向绕行的；

(3) $\int_{\Gamma}y^2\,\mathrm{d}x+z^2\,\mathrm{d}y+x^2\,\mathrm{d}z$，$\Gamma$ 为 $x^2+y^2+z^2=a^2$，$x+y+z=a$，从原点看去，Γ 是反时针方向绕行的.

5. 设曲面 Σ 有单位法向量 $\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{a}$ 是一个常向量. 求证：

$$\int_{\partial\Sigma}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{p}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{p}=2\iint_{\Sigma}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma.$$

§ 18.5 微分形式和外微分运算

在前面几节中，我们已经证明过 Green 公式、Gauss 公式和 Stokes 公式. 具体地说，Green 公式表达了平面区域上的二重积分同它的边界上的曲线积分之间的联系，Gauss 公式展示了三维区域上的三重积分同它的边界上的曲面积分之间的联系，而 Stokes 公式叙述的是空间中的一块曲面上的曲面积分同沿它的边界的曲线积分之间的关联. 这种表示式在讨论各种积分之间的转换时，起着重要的作用. 人们自然会想到，n 维空间的 $p\ (\leqslant n)$ 维曲面上的积分与其边界上的积分之间，有没有联系？能不能用类似的公式表达？要说清楚这个问题，必须引进新的数学工具——**微分形式和外微分运算**.

我们从简单的情况说起，先在 $\mathbf{R}^3$ 中讨论这些概念，然后把它们向 $\mathbf{R}^n$ 中

推广.

在微分 dx，dy，dz 之间引进**外积**运算，用符号 $\wedge$ 表示，运算规则是

$$dx \wedge dx = 0,\ dy \wedge dy = 0,\ dz \wedge dz = 0,$$
$$dx \wedge dy = -dy \wedge dx,\ dy \wedge dz = -dz \wedge dy,$$
$$dz \wedge dx = -dx \wedge dz.$$

对于三个微分作外积，允许使用结合律，例如：

$$\begin{aligned} dx \wedge dy \wedge dz &= (dx \wedge dy) \wedge dz \\ &= -(dy \wedge dx) \wedge dz \\ &= -dy \wedge dx \wedge dz, \\ dx \wedge dy \wedge dx &= dx \wedge (dy \wedge dx) \\ &= -dx \wedge (dx \wedge dy) \\ &= -(dx \wedge dx) \wedge dy = 0, \end{aligned}$$

等等. 由此可见，在 $\mathbf{R}^3$ 中，多于三个的微分作外积，其结果必然是 0.

设 P，Q，R 是定义在 $\mathbf{R}^3$ 中的函数，下列表达式

$$P\, dx + Q\, dy + R\, dz,$$
$$P\, dy \wedge dz + Q\, dz \wedge dx + R\, dx \wedge dy,$$
$$R dx \wedge dy \wedge dz,$$

分别称为 1 次、2 次和 3 次**微分形式**或简称 1 次、2 次和 3 次形式.

$\mathbf{R}^3$ 中的函数 f 称为 0 次微分形式，也简称 0 次形式.

通过下面的例子，可以熟悉微分形式之间的运算.

例 1 设有微分形式

$$\omega = f\, dx + g\, dy + h\, dz,$$
$$\theta = P\, dx + Q\, dy + R\, dz,$$

计算 $\omega \wedge \theta$.

解 按定义展开 $\omega \wedge \theta$ 之后，本应有 9 个加项，但显然有 3 项等于零，所以

$$\begin{aligned} \omega \wedge \theta &= fQ\, dx \wedge dy + fR\, dx \wedge dz + gP\, dy \wedge dx + gR\, dy \wedge dz + \\ &\quad hP\, dz \wedge dx + hQ\, dz \wedge dy \\ &= (gR - hQ) dy \wedge dz + (hP - fR) dz \wedge dx + (fQ - gP) dx \wedge dy \\ &= \begin{vmatrix} dy \wedge dz & dz \wedge dx & dx \wedge dy \\ f & g & h \\ P & Q & R \end{vmatrix}. \quad \square \end{aligned}$$

例 2 设有微分形式

$$\omega = f\, dx + g\, dy + h\, dz,$$
$$\theta = P\, dy \wedge dz + Q\, dz \wedge dx + R\, dx \wedge dy,$$

计算 $\omega\wedge\theta$.

解 我们有

$$\omega\wedge\theta=(f\,dx+g\,dy+h\,dz)\wedge(P\,dy\wedge dz+Q\,dz\wedge dx+R\,dx\wedge dy),$$

展开之后，应当共有 9 项，不过其中有 6 项应等于零，因此

$$\begin{aligned}\omega\wedge\theta&=fP\,dx\wedge dy\wedge dz+gQ\,dy\wedge dz\wedge dx+hR\,dz\wedge dx\wedge dy\\&=(fP+gQ+hR)dx\wedge dy\wedge dz.\end{aligned}$$ □

现在引进**外微分运算** d. 设 f 是 0 次形式，定义 d 对 f 的运算结果是

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz,$$

这是一个 1 次微分形式.

设一次微分形式 $\omega=P\,dx+Q\,dy+R\,dz$，我们规定

$$d\omega=dP\wedge dx+dQ\wedge dy+dR\wedge dz,$$

即

$$\begin{aligned}d\omega=&\left(\frac{\partial P}{\partial x}dx+\frac{\partial P}{\partial y}dy+\frac{\partial P}{\partial z}dz\right)\wedge dx\\&+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}dx+\frac{\partial Q}{\partial y}dy+\frac{\partial Q}{\partial z}dz\right)\wedge dy\\&+\left(\frac{\partial R}{\partial x}dx+\frac{\partial R}{\partial y}dy+\frac{\partial R}{\partial z}dz\right)\wedge dz,\end{aligned}$$

化简后得到

$$\begin{aligned}d\omega=&\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dy\wedge dz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dz\wedge dx\\&+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\wedge dy,\end{aligned}\tag{1}$$

这是一个 2 次形式.

如果是 2 次形式 $\omega=P\,dy\wedge dz+Q\,dz\wedge dx+R\,dx\wedge dy$，我们规定

$$d\omega=dP\wedge dy\wedge dz+dQ\wedge dz\wedge dx+dR\wedge dx\wedge dy,$$

化简后得出

$$d\omega=\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dx\wedge dy\wedge dz,\tag{2}$$

这是一个 3 次形式.

下面即将看到，利用刚才引进的微分形式和外微分运算，我们可以把 Green 公式、Gauss 公式和 stokes 公式写成一种和谐统一的形式.

先看 Green 公式，设 P，Q 是 $D\subset\mathbf{R}^2$ 上的连续可微函数，如果令 $\omega=P\,dx+Q\,dy$，那么它的外微分

$$\begin{aligned}d\omega&=dP\wedge dx+dQ\wedge dy\\&=\left(\frac{\partial P}{\partial x}dx+\frac{\partial P}{\partial y}dy\right)\wedge dx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}dx+\frac{\partial Q}{\partial y}dy\right)\wedge dy\end{aligned}$$

$$=\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y,$$

于是，Green 公式可以写成

$$\int_{\partial D}\omega=\int_{D}\mathrm{d}\omega,$$

这里的 D 是满足一定条件的平面区域，而∂D 表示 D 的边界曲线.

再看 Gauss 公式，由于公式(2)，Gauss 公式可以表示为

$$\int_{\partial D}\omega=\int_{D}\mathrm{d}\omega,$$

这里 ω 是一个 2 次形式.

由于公式(1)，Stokes 公式也可以表示成同样的形式，只不过其中 ω 是一个 1 次形式.

三个看上去完全不同的公式，在引进微分形式和外微分运算之后，居然得到了外形一模一样的表达式. 这个表达式非常简洁，非常优美，非常和谐，十分便于记忆. 这不是偶然的巧合，而恰恰是反映了事物的本质，这使得我们有可能把这个公式向高维推广.

现在来定义 $\mathbf{R}^n$ 中的微分形式.

在空间 $\mathbf{R}^n$ 中，仍将向量$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$记为 $\boldsymbol{x}$，我们称表达式

$$\sum_{i_1,\cdots,i_p}a_{i_1,\cdots,i_p}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}\tag{3}$$

为一个 **p 次微分形式**，简称 p - 形式，这里标号 i_1，$\cdots$，i_p 中的每一个都独立地从 1 跑到 n. 我们常常把(3)式简记为

$$\sum_{I}a_I(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_I,$$

此处 I 表示一个 p 重指标，即 $I=(i_1,\cdots,i_p)$，它的每一个分量都从 1 到 n 独立地变化. 我们也把数值函数 $f(\boldsymbol{x})=f(x_1,\cdots,x_n)$叫做 $\mathbf{R}^n$ 中的 0 次微分形式.

对于一个 p 次微分形式和一个数量函数f，定义运算

$$f(\boldsymbol{x})\sum_{I}a_I(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_I=\sum_{I}(f(\boldsymbol{x})a_I(\boldsymbol{x}))\mathrm{d}x_I,$$

称为这个 p 次微分形式乘以函数f. 对于两个 p 次微分形式，按下列等式定义加法运算

$$\sum_{I}a_I(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_I+\sum_{I}b_I(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_I=\sum_{I}(a_I(\boldsymbol{x})+b_I(\boldsymbol{x}))\mathrm{d}x_I.$$

关于符号“$\wedge$”，我们约定

$$\begin{cases}\mathrm{d}x_i\wedge\mathrm{d}x_j=-\mathrm{d}x_j\wedge\mathrm{d}x_i,\\ \mathrm{d}x_i\wedge\mathrm{d}x_i=0.\end{cases}\tag{4}$$

由于约定(4)，可见在表达式

$$\mathrm{d}x_{i_1}\wedge \mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}x_{i_p}$$

中，如果下标 i_1，i_2，$\cdots$，i_p 中有重复出现的，那么这个表达式就等于零. 因此，和式(3)中，有许多项将等于零，还有另外一些项可以合并. 于是，(3)式可以写为

$$\omega = \sum a_{i_1,\cdots,i_p}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}x_{i_p}. \tag{5}$$

这里的求和是对一切适合条件

$$1\leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leqslant n$$

的指标进行，人们常设 p - 形式 ω 已写成了(5)的样子.

对这样的 p 次微分形式，定义它的外微分

$$\mathrm{d}\omega = \sum_{i_1,\cdots,i_p} \mathrm{d}a_{i_1,\cdots,i_p}(\boldsymbol{x})\wedge \mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}x_{i_p},$$

它是一个 $p+1$ 次微分形式.

现在的问题是如何定义 p 次微分形式在 p 维曲面上的积分. 设 $\mathbf{R}^n$ 中的 p 维曲面 $\boldsymbol{\Phi}$ 有参数表示

$$\boldsymbol{\Phi}:\begin{cases} x_1 = x_1(u_1,\cdots,u_p), \\ \qquad\cdots\cdots \\ x_n = x_n(u_1,\cdots,u_p), \end{cases}$$

其中 $(u_1,\cdots,u_p)\in E\subset \mathbf{R}^p$，$E$ 称为这张曲面的参数域，我们假定函数 $x_i(u_1,\cdots,u_p), i=1, 2, \cdots, n$，在 E 上有一阶连续的偏导数. 因此，$\mathbf{R}^n$ 中的 p 维曲面 $\boldsymbol{\Phi}$：$E\to\mathbf{R}^n$ 实际上就是 E 到 $\mathbf{R}^n$ 中的一个 C^1映射. 设

$$\omega = \sum_{i_1,\cdots,i_p} a_{i_1,\cdots,i_p}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}x_{i_p}$$

是定义在 $\boldsymbol{\Phi}$ 上的一个 p 次微分形式，定义 ω 在 $\boldsymbol{\Phi}$ 上的积分为

$$\int_{\boldsymbol{\Phi}}\omega = \int_E \sum_{i_1,\cdots,i_p} a_{i_1,\cdots,i_p}(\boldsymbol{\Phi}(u))\frac{\partial(x_{i_1},\cdots,x_{i_p})}{\partial(u_1,\cdots,u_p)}\mathrm{d}u_1\cdots\mathrm{d}u_p,$$

它是一个 $E\subset\mathbf{R}^p$ 上的 p 重积分.

其实，这个计算公式我们并不陌生，§ 18.3 中的第二型曲面积分正是化成二重积分来计算的. 对于这样定义的积分，我们仍然有公式

$$\int_{\partial\Omega}\omega = \int_{\Omega}\mathrm{d}\omega$$

成立，这就是一般形式的 Stokes 公式，但它的证明却已经超出本书的知识范围.

练习题 18.5

1. 计算：

(1) $(x\,dx + y\,dy) \wedge (zdz - zdx)$;

(2) $(dx + dy + dz) \wedge (xdx \wedge dy - zdy \wedge dz)$.

2. 计算 $d\omega$，设：

(1) $\omega = xy + yz + zx$;

(2) $\omega = xy\,dx$;

(3) $\omega = (xy + yz)dx$;

(4) $\omega = xy\,dx + x^2dy$;

(5) $\omega = x^2y\,dx - yz\,e^x\,dy$;

(6) $\omega = xy^2\,dy \wedge dz - xz^2\,dx \wedge dy$;

(7) $\omega = xy\,dy \wedge dz + yz\,dz \wedge dx + zx\,dx \wedge dy$.

3. 设微分形式 $\omega \in C^2$，证明：

$$d(d\omega) = 0.$$

问题 18.5

1. 考察 $\mathbf{R}^n$ 中的 n 个 1-形式

$$\omega_j = \sum_{i=1}^{n} a_i^j(\boldsymbol{x})dx_i,$$

其中 $j = 1, 2, \cdots, n$，求证：

$$\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \cdots \wedge \omega_n = \det(a_i^j(\boldsymbol{x}))dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

2. 设 $f_j(x_1, \cdots, x_n)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的 n 个数量函数，df_j 是它们的微分，$j = 1, 2, \cdots, n$，求证：

$$df_1 \wedge df_2 \wedge \cdots \wedge df_n = \frac{\partial(f_1, f_2, \cdots, f_n)}{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_n)}dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

第19章 场的数学

本书的第17章和第18章的内容，即曲线积分和曲面积分以及相关的定理，对于物理学有着特别重要的意义．具体来说，它们在电磁学、流体力学、理论力学和理论物理等物理分支中，有着广泛的应用．物理学家在使用这些数学理论的时候，往往采用一些特殊的术语和记号，这些我们过去都不曾谈到过．

场是最重要的物理概念之一．由于地心引力的作用，在地球表面和外层空间的每一点，都有一个确定的引力存在，物理上常说是一个引力场．如果在某一范围之内，存在着温度分布，也就是说，在这个范围内的每一点处，都有一个确定的温度，我们说，这样就给出了一个温度场．

如果撇开具体的物理内容，单单从数学的立场上来看，场的概念就很简单了．设点集 $D\subset\mathbf{R}^3$，如果有函数 f：$D\to\mathbf{R}$，则称 f 是 D 上的一个**数量场**；如果有 $\boldsymbol{F}$：$D\to\mathbf{R}^3$，那么就称 $\boldsymbol{F}$ 是 D 上的一个**向量场**．这就是说，D 上的数量场，就是定义在 D 上的数量函数；D 上的向量场，是指定义在 D 上的向量值函数．

§19.1 数量场的梯度

在本章的所有讨论中，假定所涉及的数量函数 f 和向量值函数 $\boldsymbol{F}$ 都有我们所需要的各阶连续的偏导数．

设 $D\subset\mathbf{R}^3$ 为一开集，函数 f：$D\to\mathbf{R}$ 连续可微．又设 $\boldsymbol{u}$ 是一个方向，$\boldsymbol{u}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$，那么由§14.4定理14.6可知，在 $\boldsymbol{p}_0\in D$ 处，f 沿方向 $\boldsymbol{u}$ 的方向导数是

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{p}_0)\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{p}_0)\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}(\boldsymbol{p}_0)\cos\gamma.$$

现在问：在各个不同的方向上，沿哪一个方向的方向导数取到最大值？这个最大值等于多少？

由 Cauchy－Schwarz 不等式，可知

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{p}_0)\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{p}_0)\cos\beta+\frac{\partial y}{\partial z}(\boldsymbol{p}_0)\cos\gamma\right)^2$$

$$\leqslant\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2\right)\bigg|_{p_0},$$

上式中等号成立的条件是方向 $\boldsymbol{u}$ 与向量

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)\bigg|_{p_0}$$

有相同的指向. 这个向量, 我们曾用记号 $Jf(\boldsymbol{p}_0)$来表示它, 在 § 14.2 中, 也使用过记号 $\mathbf{grad}\, f(\boldsymbol{p}_0)$, 并称之为 f 在 $\boldsymbol{p}_0$ 的**梯度**.

这就是说, 对定义在 D 上的数量函数f, f 的梯度是一个向量

$$\mathbf{grad}\, f(\boldsymbol{p})=\left(\frac{\partial f(\boldsymbol{p})}{\partial x},\frac{\partial f(\boldsymbol{p})}{\partial y},\frac{\partial f(\boldsymbol{p})}{\partial z}\right),$$

沿着这一方向, 方向导数有最大的数值, 也就是说, 在梯度的方向上, 函数 f 的变化最为剧烈; 而这个最大值正好是 $\|\mathbf{grad}\, f(\boldsymbol{p})\|$.

为了说明梯度的几何意义,我们引入数量场 f 的**等值面**的概念.称点集

$$\{\boldsymbol{p}\in D: f(\boldsymbol{p})=c, c\text{ 为常数}\}$$

为数量场 f 的 **c - 等值面**. 注意, 对于某些 c, f 的 c - 等值面可能是空集.

回忆 § 15.1 的内容, 我们知道隐式曲面 $f(x,y,z)-c=0$ 的法向量是: $\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)$, 这正是 $\mathbf{grad}\, f$. 所以说, 数量场 f 的梯度正是f 的等值面的法向量.

物理学家们常常喜欢用“算子”来作运算, 这样做确实有其简便之处, 我们令

$$\boldsymbol{\nabla}=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right),$$

读为 **Nabla**. 孤立的一个算子并没有意义, 只有将它作用到某个对象上才能产生数或者向量. 规定

$$\boldsymbol{\nabla} f=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right),$$

好比是将 f 从右边去乘“向量”$\boldsymbol{\nabla}$, 也就是把 f 放到它的每一个分量上, 所以 $\boldsymbol{\nabla} f$ 是梯度的另一种表示.

Nabla 运算满足下列规则:

1° $\boldsymbol{\nabla}(cf)=c\boldsymbol{\nabla} f$, 其中 c 为常数;

2° $\boldsymbol{\nabla}(f\pm g)=\boldsymbol{\nabla} f\pm\boldsymbol{\nabla} g$;

3° $\boldsymbol{\nabla}(fg)=f\boldsymbol{\nabla} g+g\boldsymbol{\nabla} f$;

4° 设 φ 是单变量函数, 则$\boldsymbol{\nabla}\varphi\circ f=\varphi'\circ f\,\boldsymbol{\nabla} f$.

直截了当的计算, 便可验证以上四条规则.

例 1 设径向量 $\boldsymbol{p}=(x,y,z)$, 令 $p=\|\boldsymbol{p}\|$. 求梯度$\boldsymbol{\nabla} p$.

解 因为 $\boldsymbol{p}^2=\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p}=x^2+y^2+z^2$，依性质 4°，得到

$$2p\,\nabla p=\nabla p^2=\nabla(x^2+y^2+z^2)=2(x,y,z)=2\boldsymbol{p},$$

所以当 $\boldsymbol{p}\neq\boldsymbol{0}$ 时，有

$$\nabla p=\frac{\boldsymbol{p}}{\|\boldsymbol{p}\|}=\frac{\boldsymbol{p}}{p}. \quad \square$$

练习题 19.1

1. 设 f，g 为数量场，证明：

$$\nabla\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{1}{g^2}(g\,\nabla f-f\,\nabla g).$$

2. 设 u 为一数量场，$\boldsymbol{f}$ 为一向量场．计算$\nabla(u\cdot\boldsymbol{f})$．
3. 设 $\boldsymbol{p}=(x,y,z)$，$p=\|\boldsymbol{p}\|$，f 为单变量函数．计算：
   (1) $\nabla\log p$；　　(2) $\nabla f(p)$；
   (3) $\nabla f(p^2)$；　　(4) $\nabla(f(p)\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{a})$，$\boldsymbol{a}$ 为常向量．
4. 求数量场 f 沿数量场 g 的梯度方向的变化率，问何时这个变化率等于零．
5. 设 Ω 是 Gauss 公式中的闭区域，$\boldsymbol{n}$ 是$\partial\Omega$ 上的单位外法向量场，数量场 $u\in C^1(\Omega)$，点 $\boldsymbol{p}\in\Omega^\circ$，求证：

$$\nabla u(\boldsymbol{p})=\lim_{\Omega\to p}\frac{1}{\mu(\Omega)}\int_{\partial\Omega}u\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma.$$

§ 19.2 向量场的散度

我们已经说过，如果点集 $D\subset\mathbf{R}^3$，$\boldsymbol{F}$ 是定义在 D 上的一个向量值函数，就称 $\boldsymbol{F}$ 是 D 上的一个向量场．

设 $D\subset\mathbf{R}^3$ 为区域，在 D 上定义着一个向量场 $\boldsymbol{F}=(P,Q,R)$．又设曲面 $\Sigma\subset D$，当我们给予 Σ 定向之后，就可以考虑第二型曲面积分

$$\int_{\Sigma}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma \text{ 或 } \iint_{\Sigma}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma},$$

这是 § 18.3 中的内容．现在，我们撇开场 $\boldsymbol{F}$ 的具体涵义，称上述积分为向量场 $\boldsymbol{F}$ 通过定向曲面 Σ 的**通量**．

现在，设 $\Omega\subset D$ 是 Gauss 公式(见 § 18.4)所要求的闭区域，用$\partial\Omega$ 记 Ω 的边界曲面，取单位向量 $\boldsymbol{n}$ 为$\partial\Omega$ 的外法向，Gauss 公式告诉我们

$$\int_{\partial\Omega}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}\sigma=\int_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}\mu.$$

我们定义

$$\mathrm{div}\boldsymbol{F}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z},$$

把它叫做向量场 $\boldsymbol{F}$ 的**散度**(div 是英文 divergence 的缩写). 这样一来，Gauss 公式可以表示为

$$\int_{\partial\Omega}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}\sigma=\int_{\Omega}\mathrm{div}\boldsymbol{F}\ \mathrm{d}\mu.$$

为了说明散度的物理意义，我们把 $\boldsymbol{F}$ 设想成流速场，那么上式左边的通量就是在单位时间内流出 $\partial\Omega$ 的总量. 这是一个代数和，因为在某一个局部，从 $\partial\Omega$ 的里面流到外面的流体多一些，而在另一个局部，从 $\partial\Omega$ 的外面流进来的流体多一些. 如果这个曲面积分值是正的，表明体内的流体量减少；如果是负的，说明体内的流体增多了.

在 D 内任取一个内点，记为 $\boldsymbol{p}_0$，以 $\boldsymbol{p}_0$ 为球心，作一个半径为 ε 的小球，记作 B_ε. 让 ε 是如此之小，以便使得 $B_\varepsilon\subset D$，令 ∂B_ε 表示小球的球面，取 $\boldsymbol{n}$ 为外法线方向. 由 Gauss 公式

$$\int_{\partial B_\varepsilon}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}\sigma=\int_{B_\varepsilon}\mathrm{div}\boldsymbol{F}\mathrm{d}\mu.$$

对上式右边用三重积分的平均值定理，得出

$$\int_{B_\varepsilon}\mathrm{div}\boldsymbol{F}\mathrm{d}\mu=\mathrm{div}\boldsymbol{F}\ (\boldsymbol{\xi})\int_{B_\varepsilon}\mathrm{d}\mu=\mathrm{div}\boldsymbol{F}\ (\boldsymbol{\xi})\mu\ (B_\varepsilon),$$

其中点 $\boldsymbol{\xi}\in B_\varepsilon$. 由此得到

$$\mathrm{div}\boldsymbol{F}\ (\boldsymbol{\xi})=\frac{1}{\mu\ (B_\varepsilon)}\int_{\partial B_\varepsilon}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}\sigma,$$

上式右边的量表示的是：单位体积上流速场送出的流体量；如果令 $\varepsilon\to 0$，即让小球无限地向点 $\boldsymbol{p}_0$ 收缩时，立即得到

$$\mathrm{div}\boldsymbol{F}\ (\boldsymbol{p}_0)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\mu\ (B_\varepsilon)}\int_{\partial B_\varepsilon}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}\sigma,$$

由此可见，散度刻画出在一点处，流速场产生流体的能力.

利用 Nabla 算子，散度可以写成

$$\mathrm{div}\boldsymbol{F}=\nabla\cdot\boldsymbol{F}.$$

容易验证以下规则：

1° $\nabla\cdot(c\boldsymbol{F})=c\nabla\cdot\boldsymbol{F}$，这里 c 为常数；

2° $\nabla\cdot(\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2)=\nabla\cdot\boldsymbol{F}_1+\nabla\cdot\boldsymbol{F}_2$；

3° 设 φ 是数量场，那么

$$\nabla \cdot \varphi \boldsymbol{F} = \varphi \nabla \cdot \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F} \cdot \nabla \varphi .$$

我们只证最后一式．由于 $\varphi \boldsymbol{F} = (\varphi P, \varphi Q, \varphi R)$，所以

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \varphi \boldsymbol{F} &= \frac{\partial(\varphi P)}{\partial x} + \frac{\partial(\varphi Q)}{\partial y} + \frac{\partial(\varphi R)}{\partial z} \\ &= \varphi\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) + P\frac{\partial \varphi}{\partial x} + Q\frac{\partial \varphi}{\partial y} + R\frac{\partial \varphi}{\partial z} \\ &= \varphi \nabla \cdot \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F} \cdot \nabla \varphi .\end{aligned}$$

例 1 设 $\boldsymbol{p} = (x, y, z)$，$p = \| \boldsymbol{p} \|$，计算 $\operatorname{div} p^{\alpha} \boldsymbol{p}$．

解 因为

$$\nabla \cdot \boldsymbol{p} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3,$$

又由 § 19.1 例 1，可得

$$\nabla p^{\alpha} = \alpha p^{\alpha - 1} \nabla p = \alpha p^{\alpha - 1} \frac{\boldsymbol{p}}{p} = \alpha p^{\alpha - 2} \boldsymbol{p},$$

根据性质 3°，我们有

$$\nabla \cdot p^{\alpha} \boldsymbol{p} = p^{\alpha} \nabla \cdot \boldsymbol{p} + \boldsymbol{p} \cdot \nabla p^{\alpha} = 3p^{\alpha} + \boldsymbol{p} \cdot \alpha p^{\alpha - 2} \boldsymbol{p} = (3 + \alpha) p^{\alpha}.$$

特别地，当 $\alpha = -3$ 时，有

$$\operatorname{div} \frac{\boldsymbol{p}}{p^3} = 0. \qquad \square$$

现在，引入记号 $\Delta = \nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$，即

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

称之为 Laplace **算子**．设 Ω 为一区域，如果 Ω 上的数量场 u 满足 Laplace **方程**

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

那么称 u 是 Ω 上的**调和函数**．

例 2 在 $\mathbf{R}^3$ 中，设 $\boldsymbol{p} = (x, y, z)$，$p = \| \boldsymbol{p} \|$．证明：$\dfrac{1}{p}(p > 0)$是一调和函数．

证明 利用例 1，我们有

$$\Delta \frac{1}{p} = \nabla^2 \frac{1}{p} = \nabla \cdot \nabla \frac{1}{p} = -\nabla \cdot \frac{\boldsymbol{p}}{p^3} = 0,$$

命题得证． $\square$

例 3 静电场的 Gauss 定理

在静电场中，通过任一封闭曲面的电通量，等于此曲面所包含的电荷总量的 4π 倍．

设 Σ 是一封闭曲面，取它的外法线的方向为其定向．为了便于读者接受，我们分三步证．

1° 设在坐标原点上放置电量为 q 的点电荷，这个点电荷产生的电场强度(简称场强)是向量

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{p})=\frac{q}{p^3}\boldsymbol{p},\quad \boldsymbol{p}\neq 0,$$

其中 $p=\|\boldsymbol{p}\|$．由例1可知：当 $\boldsymbol{p}\neq\boldsymbol{0}$ 时，

$$\operatorname{div}\boldsymbol{E}=0.$$

如果原点 O 在 Σ 所围成的体的外部，由 Gauss 公式立知

$$\int_\Sigma \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma=0.$$

就是说，这时 $\boldsymbol{E}$ 过封闭曲面 Σ 的通量等于零．

再设 O 被曲面 Σ 包围在内部．这时，以 O 为中心、以充分小的 ε 为半径作一小球，记为 Σ_ε，使得这个球完全在曲面 Σ 的包围之内．由 Σ 与 Σ_ε 所围成的区域，其形象宛如一只桃子被挖去了核，在这区域上有 $\operatorname{div}\boldsymbol{E}=0$．如果 Σ_ε 也由外法线定向，这时由 Gauss 公式导出

$$\int_\Sigma \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma+\int_{-\Sigma_\varepsilon}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma=0,$$

这也就是

$$\int_\Sigma \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma=\int_{\Sigma_\varepsilon}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma.$$

在球面 Σ_ε 上，取法向量 $\boldsymbol{n}=\dfrac{\boldsymbol{p}}{p}$，于是

$$\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}=\frac{q}{p^2}=\frac{q}{\varepsilon^2},$$

因此

$$\int_{\Sigma_\varepsilon}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma=\frac{q}{\varepsilon^2}\sigma(\Sigma_\varepsilon)=4\pi q,$$

也就是

$$\int_\Sigma \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma=4\pi q.$$

这时电荷被包含在曲面 Σ 之内．

2° 设想有有限个点电荷，带电量分别为 $q_1,\ q_2,\ \cdots,\ q_k$．设点电荷 q_i 产生的场强为 $\boldsymbol{E}_i\ (i=1,2,\cdots,k)$．因此，它们产生的总的场强 $\boldsymbol{E}$ 是诸 $\boldsymbol{E}_i$ 的叠加，即

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2+\cdots+\boldsymbol{E}_k.$$

设 Σ 是一封闭曲面，法线指向外侧．如果设电荷 q_1，…，q_t 被包含在 Σ 的内部，其余的点电荷 q_{t+1}，…，q_k 在 Σ 的外面，由 1°可知

$$\int_{\Sigma} \boldsymbol{E}_i \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}\sigma = \begin{cases} 4\pi q_i, & i = 1, 2, \cdots, t, \\ 0, & i = t+1, t+2, \cdots, k. \end{cases}$$

因此

$$\int_{\Sigma} \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}\sigma = \sum_{i=1}^{k} \int_{\Sigma} \boldsymbol{E}_i \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}\sigma = 4\pi (q_1 + \cdots + q_t).$$

3° 最后，设区域 D 内的场强 $\boldsymbol{E}$ 是由连续分布的电荷所产生的，电荷密度是 $\rho(\boldsymbol{p})$，它是点的函数．设 $\Omega \subset D$，其内包含的总电荷正是三重积分 $\int_{\Omega} \rho \mathrm{d}\mu$．因此有

$$\int_{\partial\Omega} \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}\sigma = 4\pi \int_{\Omega} \rho \mathrm{d}\mu. \qquad \square$$

如果在等式的左边应用 Gauss 公式，我们得出

$$\int_{\Omega} \mathrm{div} \boldsymbol{E} \mathrm{d}\mu = 4\pi \int_{\Omega} \rho \mathrm{d}\mu,$$

也就是说

$$\int_{\Omega} (\mathrm{div} \boldsymbol{E} - 4\pi\rho) \mathrm{d}\mu = 0.$$

因为 Ω 可以是 D 中任何立体，所以由上式可知

$$\mathrm{div} \boldsymbol{E} = 4\pi\rho$$

在该 D 上处处成立．这是 Gauss 定理的微分形式，也是静电场的基本公式之一．

例 4 不可压缩流体的连续性方程

设 $\boldsymbol{F}$ 是流速场，数量场 ρ 是流体在各点处的密度．场 $\boldsymbol{F}$ 和 ρ 既依赖于空间点的位置，也依赖于时间 t．设 Ω 是空间中任意固定的区域．那么流体的质量关于时间 t 的变化率应是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\Omega} \rho(\boldsymbol{p}, t) \mathrm{d}\mu = \int_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t}(\boldsymbol{p}, t) \mathrm{d}\mu.$$

由于该流体是不可压缩的，上述变化率必须等于流体进入 Ω 的速率，即

$$-\int_{\partial\Omega} \rho \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}\sigma,$$

这里 $\boldsymbol{n}$ 表示 $\partial\Omega$ 的单位外法向量场．由 Gauss 公式

$$\int_{\partial\Omega} \rho \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}\sigma = \int_{\Omega} \mathrm{div}(\rho \boldsymbol{F}) \mathrm{d}\mu.$$

由此得出

$$\int\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho \boldsymbol{F})\right) \mathrm{d}\mu=0.$$

由被积函数的连续性以及 Ω 是任意的区域，必须有

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho \boldsymbol{F})=0$$

在空间中处处成立．最后这一个表达式称为**流体的连续性方程**．□

练习题　19.2

1．在 $\mathbf{R}^2$ 中，令 $\boldsymbol{p}=(x,y)$ 且 $p=\|\boldsymbol{p}\|$，求证：当 $p>0$ 时 $\log p$ 是调和函数．

2．求证：

$$\Delta(fg)=f\Delta g+g\Delta f+2\nabla f\cdot\nabla g.$$

3．Ω 是 Gauss 公式中的闭区域，$u,v\in C^1(\Omega)$，$\boldsymbol{n}$ 表示 $\partial\Omega$ 的单位外法向量场．求证：

(1) $\displaystyle\int\limits_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}\sigma=\int\limits_{\Omega}\Delta u\,\mathrm{d}\mu$；

(2) $\displaystyle\int\limits_{\partial\Omega}v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}\sigma=\int\limits_{\Omega}\nabla u\cdot\nabla v\,\mathrm{d}\mu+\int\limits_{\Omega}v\Delta u\,\mathrm{d}\mu$；

(3)（第二 Green 公式）

$$\int\limits_{\partial\Omega}\begin{vmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} & \dfrac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}\\ u & v\end{vmatrix}\mathrm{d}\sigma=\int\limits_{\Omega}\begin{vmatrix}\Delta u & \Delta v\\ u & v\end{vmatrix}\mathrm{d}\mu.$$

4．设 u 是 $\mathbf{R}^3$ 中的闭区域 Ω 上的调和函数，求证：

(1) $\displaystyle\int\limits_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}\sigma=0$；(2) $\displaystyle\int\limits_{\partial\Omega}u\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}\sigma=\int\limits_{\Omega}\|\nabla u\|^2\mathrm{d}\mu$.

问题　19.2

1．设 u 是 $\mathbf{R}^3$ 中闭区域 Ω 上的调和函数，求证：

$$u(\boldsymbol{p}_0)=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\partial\Omega}\left(u\frac{\cos(\boldsymbol{p},\boldsymbol{n})}{p^2}+\frac{1}{p}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right)\mathrm{d}\sigma,$$

其中 $\boldsymbol{p}_0$ 是 Ω 内部任意一点，$\boldsymbol{p}$ 为从 $\boldsymbol{p}_0$ 到 $\partial\Omega$ 上的点的向量，$p=\|\boldsymbol{p}\|$．这一事实表明，调和函数由其在边界上的值完全确定．

2．（调和函数的平均值定理）若 u 在 Ω 内部调和，$\boldsymbol{p}_0$ 是 Ω 内部任意一点，Σ 是在 Ω 内以 $\boldsymbol{p}_0$ 为球心、以 R 为半径的球面，求证：

$$u(p_0)=\frac{1}{4\pi R^2}\int_{\Sigma}u\,\mathrm{d}\sigma.$$

3. 若 u 在闭区域 Ω 内调和，在 Ω 上连续且非常数，求证：u 只在 $\partial\Omega$ 上取到它在 Ω 上的最大值和最小值.

§ 19.3　向量场的旋度

设区域 $\Omega\subset\mathbf{R}^3$，在 Ω 上给定了一个向量场 $\boldsymbol{F}$，设 $\boldsymbol{p}_0$ 是 Ω 中的任一点，$\boldsymbol{n}$ 是任意的单位向量. 以 $\boldsymbol{p}_0$ 为圆心，充分小的数 $\varepsilon>0$ 为半径作一个垂直于向量 $\boldsymbol{n}$ 的小圆盘 $D_\varepsilon\subset\Omega$. 用 ∂D_ε 表示圆盘 D_ε 的边界——它是一个以 ε 为半径的圆周，用 $\boldsymbol{t}$ 表示 ∂D_ε 上沿正方向的单位切向量. 计算第二型曲线积分

$$\int_{\partial D_\varepsilon}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{p}=\int_{\partial D_\varepsilon}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{t}\mathrm{d}s,$$

称这一数值为向量场 $\boldsymbol{F}$ 在圆周上的**环量**. 我们来考察这一积分与圆盘 D_ε 的面积之比

$$\frac{1}{\sigma(D_\varepsilon)}\int_{\partial D_\varepsilon}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{t}\mathrm{d}s. \tag{1}$$

这个比值反映了向量场 $\boldsymbol{F}$ 沿着曲线 ∂D_ε 的旋转状态. 当 $\varepsilon\to0$ 时，这个比值趋向的极限，反映了向量场 $\boldsymbol{F}$ 在点 $\boldsymbol{p}_0$ 处在垂直于 $\boldsymbol{n}$ 的方向上的旋转状态. 为了求出这一极限，利用 Stokes 公式：

$$\int_{\partial D_\varepsilon}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{t}\mathrm{d}s=\int_{D_\varepsilon}\mathbf{rot}\ \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}\sigma, \tag{2}$$

若设 $\boldsymbol{F}=(P,Q,R)$，那么，记号

$$\mathbf{rot}\boldsymbol{F}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z},\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x},\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right),$$

也可以用三阶行列式表示为

$$\mathbf{rot}\boldsymbol{F}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x}&\dfrac{\partial}{\partial y}&\dfrac{\partial}{\partial z}\\ P&Q&R\end{vmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{i}$,$\boldsymbol{j}$ 和 $\boldsymbol{k}$ 分别是 x 轴,y 轴和 z 轴正向上的单位向量. 利用 Nabla 算子,上式右边能写成“向量积”的形式,即

$$\mathbf{rot}\ \boldsymbol{F}=\nabla\times\boldsymbol{F},$$

称之为向量场 $\boldsymbol{F}$ 的**旋度**(rot 是英文 rotation 的缩写). 根据积分的平均值定理, 可得

$$\int_{D_\varepsilon} \operatorname{rot} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}\sigma = (\operatorname{rot} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{q}) \cdot \boldsymbol{n}) \sigma(D_\varepsilon), \tag{3}$$

其中 $\boldsymbol{q} \in D_\varepsilon$. 由公式(1), (2)与(3)得出

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\sigma(D_\varepsilon)} \int_{\partial D_\varepsilon} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{t} \mathrm{d}s = \lim_{\varepsilon \to 0} \operatorname{rot} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{q}) \cdot \boldsymbol{n} = \operatorname{rot} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{p}_0) \cdot \boldsymbol{n},$$

也就是

$$((\nabla \times \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{n}) \boldsymbol{p}_0. \tag{4}$$

这个数量叫做向量场 $\boldsymbol{F}$ 在点 $\boldsymbol{p}_0$ 处在垂直于方向 $\boldsymbol{n}$ 的**方向旋量**.

很明显, 即使在点 $\boldsymbol{p}_0$ 固定下来之后, 这个量还依赖于单位向量 $\boldsymbol{n}$ 的选择. 我们提出这样的问题, 在怎样的方向 $\boldsymbol{n}$ 上, 向量场可以获得最大的方向旋量? 由(4)显然可见, 只有取 $\boldsymbol{n}$ 与($\nabla \times \boldsymbol{F}$)有相同的指向时, 这时表达式(4)取得最大值.

现在, 我们可以来说明旋度 $\operatorname{rot} \boldsymbol{F}$ 或 $\nabla \times \boldsymbol{F}$ 的物理意义: 当任意固定一点 $\boldsymbol{p} \in \Omega$ 之后, 在垂直于 $\operatorname{rot} \boldsymbol{F}$ 的方向上, 向量场 $\boldsymbol{F}$ 将有最大的方向旋量, 并且这个最大的方向旋量的数值正是

$$\nabla \times \boldsymbol{F} \cdot \frac{\nabla \times \boldsymbol{F}}{\|\nabla \times \boldsymbol{F}\|} = \|\nabla \times \boldsymbol{F}\|.$$

旋度运算适合下列法则:

1° $\nabla \times (c\boldsymbol{F}) = c\nabla \times \boldsymbol{F}$, 其中 c 为常数;

2° $\nabla \times (\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2) = \nabla \times \boldsymbol{F}_1 + \nabla \times \boldsymbol{F}_2$;

3° 设 φ 是数量函数, 则有

$$\nabla \times (\varphi \boldsymbol{F}) = \varphi \nabla \times \boldsymbol{F} + \nabla \varphi \times \boldsymbol{F};$$

4° $\nabla \cdot (\boldsymbol{F}_1 \times \boldsymbol{F}_2) = (\nabla \times \boldsymbol{F}_1) \cdot \boldsymbol{F}_2 - (\nabla \times \boldsymbol{F}_2) \cdot \boldsymbol{F}_1$.

公式 3°的证明: 设 $\boldsymbol{F} = (P, Q, R)$, 于是

$$\nabla \times (\varphi \boldsymbol{F}) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \varphi P & \varphi Q & \varphi R \end{vmatrix},$$

它的第一个分量是

$$\frac{\partial}{\partial y}(\varphi R) - \frac{\partial}{\partial z}(\varphi Q) = \varphi \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) + R \frac{\partial \varphi}{\partial y} - Q \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

由此可见

$$\nabla\times(\varphi\boldsymbol{F})=\varphi\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x}&\dfrac{\partial}{\partial y}&\dfrac{\partial}{\partial z}\\ P&Q&R\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}&\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}&\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\\ P&Q&R\end{vmatrix}$$

$$=\varphi\nabla\times\boldsymbol{F}+\nabla\varphi\times\boldsymbol{F}.$$

公式 4°的证明：设 $\boldsymbol{F}_i=(P_i,Q_i,R_i)$，$i=1,2$，于是

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(\boldsymbol{F}_1\times\boldsymbol{F}_2)&=\frac{\partial}{\partial x}(Q_1R_2-Q_2R_1)+\frac{\partial}{\partial y}(R_1P_2-R_2P_1)\\&\quad+\frac{\partial}{\partial z}(P_1Q_2-P_2Q_1)\\&=\left(\frac{\partial R_1}{\partial y}-\frac{\partial Q_1}{\partial z}\right)P_2+\left(\frac{\partial P_1}{\partial z}-\frac{\partial R_1}{\partial x}\right)Q_2\\&\quad+\left(\frac{\partial Q_1}{\partial x}-\frac{\partial P_1}{\partial y}\right)R_2\\&\quad-\left(\left(\frac{\partial R_2}{\partial y}-\frac{\partial Q_2}{\partial z}\right)P_1+\left(\frac{\partial P_2}{\partial z}-\frac{\partial R_2}{\partial x}\right)Q_1\right.\\&\quad\left.+\left(\frac{\partial Q_2}{\partial x}-\frac{\partial P_2}{\partial y}\right)R_1\right)\\&=(\nabla\times\boldsymbol{F}_1)\cdot\boldsymbol{F}_2-(\nabla\times\boldsymbol{F}_2)\cdot\boldsymbol{F}_1.\end{aligned}$$

例 1 设 $\boldsymbol{p}=(x,y,z)$，$p=\|\boldsymbol{p}\|$. 向量场

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{p})=f(p)\boldsymbol{p}$$

称为**有心场**，其中 f 是单变量函数. 求证：$\mathbf{rot}\boldsymbol{F}=\mathbf{0}$，其中 $p>0$.

证明 因为$\nabla\times\boldsymbol{p}=\mathbf{0}$，所以

$$\begin{aligned}\nabla\times(f\boldsymbol{p})&=f\nabla\times\boldsymbol{p}+\nabla f\times\boldsymbol{p}=\nabla f\times\boldsymbol{p}\\&=f'(p)\nabla p\times\boldsymbol{p}=f'(p)\frac{1}{p}\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{p}=\mathbf{0}.\end{aligned}$$ □

在 § 19.2 的例 3 中，我们讨论过静电场

$$\boldsymbol{E}=\frac{q}{p^3}\boldsymbol{p},$$

这是一个有心场. 由例 1 立知

$$\mathbf{rot}\ \boldsymbol{E}=\mathbf{0},$$

这也是静电场中的一个重要定理.

练习题 19.3

1. 证明：

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{F})=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{F})-\nabla^2\boldsymbol{F}.$$

2. 设 Ω 是 Gauss 公式中的闭区域，$\boldsymbol{n}$ 表示$\partial\Omega$ 的单位外法向量.

(1) 向量场 $\boldsymbol{F}\in C^1(\Omega)$，求证：

$$\mathbf{rot}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{p})=\lim_{\Omega\to p}\frac{1}{\mu(\Omega)}\int_{\partial\Omega}\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{F}\mathrm{d}\sigma;$$

(2) 数量场 $f\in C^2(\Omega)$处处不为零，且满足条件

$$\mathrm{div}(f\,\mathbf{grad}f)=af,\quad \|\nabla f\|^2=bf,$$

其中 a 与 b 为常数. 试计算 $\displaystyle\int_{\partial\Omega}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}\sigma$.

§ 19.4 有势场和势函数

定义 19.1 向量场 $\boldsymbol{F}=(P,Q,R)$定义在区域 $D\subset\mathbf{R}^3$ 上. 如果存在 D 上的一个数量场 φ，满足

$$\mathbf{grad}\,\varphi(\boldsymbol{p})=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{p}) \tag{1}$$

对一切 $\boldsymbol{p}\in D$ 成立，则称向量场 $\boldsymbol{F}$ 是**有势场**，数量场 φ 叫做向量场$\boldsymbol{F}$ 的一个**势函数**.

等式(1)也可以写成

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=P,\ \frac{\partial\varphi}{\partial y}=Q,\ \frac{\partial\varphi}{\partial z}=R. \tag{2}$$

和有势场的概念紧密相关的还有两种场.

定义 19.2 设 $\boldsymbol{F}$ 是定义在区域$D\subset\mathbf{R}^3$ 上的向量场. 如果对含于 D 中的任何一条封闭曲线 Γ，都有$\displaystyle\int_\Gamma\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{p}=0$，则称 $\boldsymbol{F}$ 是D 上的一个**保守场**.

定义 19.3 设 $\boldsymbol{F}$ 是定义在区域$D\subset\mathbf{R}^3$ 上的向量场. 如果

$$\mathbf{rot}\ \boldsymbol{F}=\nabla\times\boldsymbol{F}=\mathbf{0}$$

在 D 上处处成立，则称 $\boldsymbol{F}$ 为D 上的一个**无旋场**.

这三种向量场实际上是等价的，我们有

定理 19.1 设 $\boldsymbol{F}$ 是定义在区域$D\subset\mathbf{R}^3$ 上的一个向量场，那么从下面三条中的任意一条可以推出其他两条：

(ⅰ) $\boldsymbol{F}$ 是有势场；

(ⅱ) $\boldsymbol{F}$ 是无旋场；

(ⅲ) $\boldsymbol{F}$ 是保守场.

证明 我们按(ⅰ)⇒(ⅱ)⇒(ⅲ)⇒(ⅰ)的顺序给出定理的证明.

(ⅰ)⇒(ⅱ)设 $\boldsymbol{F}=(P,Q,R)$是有势场，因而存在势函数 φ，使得(2)成立．于是有

$$\frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial z}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z},$$
$$\frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial x}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x},$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}.$$

由此即知

$$\mathbf{rot}\boldsymbol{F}=\mathbf{0}.$$

(ⅱ)⇒(ⅲ)设 $\boldsymbol{F}$ 是一无旋场．在 D 中任取一条封闭曲线 Γ，并在 D 内作一以 Γ 为边界的曲面 Σ，这时由 Stokes 公式得到

$$\int_\Gamma \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{p}=\int_\Sigma \mathbf{rot}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}\sigma=0.$$

即 $\boldsymbol{F}$ 是 D 上的保守场．

(ⅲ)⇒(ⅰ)设 $\boldsymbol{F}$ 是一保守场．那么 $\boldsymbol{F}$ 的曲线积分与路径无关，即若 Γ_1，Γ_2 是两条有向曲线，它们都以 $\boldsymbol{a}$ 为起点，以 $\boldsymbol{b}$ 为终点，则必有

$$\int_{\Gamma_1}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{p}=\int_{\Gamma_2}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{p}.$$

今设(a,b,c)是 D 中一个固定点，(x,y,z)是 D 中的任一点，定义函数

$$\varphi(x,y,z)=\int_{(a,b,c)}^{(x,y,z)}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{p},\tag{3}$$

公式(3)右边的表示方法不会引起混乱，这是因为右边那个曲线积分与路径无关，仅由终点唯一地确定．取$|h|$充分地小，使得$(x+h,y,z)$仍在 D 内．考察

$$\varphi(x+h,y,z)=\int_{(a,b,c)}^{(x+h,y,z)}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{p}.\tag{4}$$

(4)中的曲线积分的路径可以这样理解：从点(a,b,c)到点(x,y,z)的路径还是(3)式右边的那一段路径，而从点(x,y,z)到点$(x+h,y,z)$就取这两点连成的直线段．由(4)与(3)可知

$$\begin{aligned}&\varphi(x+h,y,z)-\varphi(x,y,z)\\&=\int_{(x,y,z)}^{(x+h,y,z)}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{p}=\int_x^{x+h}P(t,y,z)\mathrm{d}t=hP(x^*,y,z),\end{aligned}$$

其中 x^* 在 x 与 $x+h$ 之间，这里利用了连续函数的积分平均值定理．由此得到

$$\frac{\varphi(x+h,y,z)-\varphi(x,y,z)}{h}=P(x^*,y,z),$$

在上式双方令 $h\to 0$，由 P 的连续性可得

$$\frac{\partial\varphi(x,y,z)}{\partial x}=P(x,y,z).$$

类似地可以证明

$$\frac{\partial\varphi(x,y,z)}{\partial y}=Q(x,y,z),\ \frac{\partial\varphi(x,y,z)}{\partial z}=R(x,y,z).$$

这就是说，由(3)定义的函数 φ 是场 $\boldsymbol{F}$ 的一个势函数．因此，$\boldsymbol{F}$ 是有势场．□

上面的证明给出了如何求保守场的势函数的具体方法．

下面是三个具体的例子．

例 1 求有心场 $\boldsymbol{F}$ 的势函数．

解 设 $D=\{\boldsymbol{p}:p>0\}$．由§19.3的例1知 $\nabla\times\boldsymbol{F}=\boldsymbol{0}$，即 $\boldsymbol{F}$ 是 D 上的无旋场．由定理19.1知道 $\boldsymbol{F}$ 是 D 上的有势场．

任意固定一点 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{0}$，则当 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{0}$ 时，依公式(3)得出 $\boldsymbol{F}$ 的一个势函数

$$\varphi(\boldsymbol{B})=\int_{\boldsymbol{A}}^{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{p}.$$

以原点为中心、以 $\|\boldsymbol{B}\|$ 为半径作球面 S．设经过点 $\boldsymbol{A}$ 的球的半径与 S 相交于点 $\boldsymbol{C}$．又设 S 上由 $\boldsymbol{C}$ 到 $\boldsymbol{B}$ 的大圆弧为 $\boldsymbol{\Gamma}$，于是

$$\varphi(\boldsymbol{B})=\int_{\overline{AC}}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{p}+\int_{\Gamma}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{p}.$$

由于在 Γ 上有 $\boldsymbol{p}^2=\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p}=p^2=\|\boldsymbol{B}\|^2$，所以 $\boldsymbol{p}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{p}=0$，即 $\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{p}=0$．由此得到势函数

$$\varphi(\boldsymbol{B})=\int_{\overline{AC}}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{p}=\int_{\|\boldsymbol{A}\|}^{\|\boldsymbol{C}\|}pf(p)\mathrm{d}p=\int_{\|\boldsymbol{A}\|}^{\|\boldsymbol{B}\|}pf(p)\mathrm{d}p.$$

特别地，对于地球的引力场

$$\boldsymbol{F}=-\frac{M}{p^3}\boldsymbol{p},$$

这里 M 是地球的质量，这时有 $f(p)=-\frac{M}{p^3}$，于是，势函数为

$$\varphi(\boldsymbol{B})=M\left(\frac{1}{\|\boldsymbol{B}\|}-\frac{1}{\|\boldsymbol{A}\|}\right).$$

由于 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{0}$ 是任意固定的点，若令 $\|\boldsymbol{A}\|\to+\infty$，显然仍得出一个势函数 $\frac{M}{\|\boldsymbol{B}\|}$，这是将一单位质量的质点从无穷远处移至点 $\boldsymbol{B}$ 处，引力场所作的功．□

例 2 设向量场

$$\boldsymbol{F}=(x^2-2yz,y^2-2xz,z^2-2xy).$$

证明：$\boldsymbol{F}$ 是有势场，并求出 $\boldsymbol{F}$ 的一个势函数．

解 令 $P=x^2-2yz$，$Q=y^2-2xz$，$R=z^2-2xy$，直接验算有

$$\frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z},\ \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x},\ \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y},\tag{5}$$

可知 $\mathbf{rot}\ \boldsymbol{F}=\mathbf{0}$，所以 $\boldsymbol{F}$ 是无旋场，也就是有势场．现在来求出 $\boldsymbol{F}$ 的一个势函数．

取定原点 $O=(0,0,0)$．设 (x,y,z) 是 $\mathbf{R}^3$ 中的任一点．为了计算的方便，选取由 O 到 $(0,0,z)$ 的线段、由 $(0,0,z)$ 到 $(0,y,z)$ 的线段和 $(0,y,z)$ 到 (x,y,z) 的线段，这三段直线段组成一条从 O 到 (x,y,z) 的折线．这时

$$\varphi(x,y,z)=\int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{p}$$

便是 $\boldsymbol{F}$ 的一个势函数．由于有

$$\begin{aligned}\varphi(x,y,z)&=\int_{(0,0,0)}^{(0,0,z)}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{p}+\int_{(0,0,z)}^{(0,y,z)}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{p}+\int_{(0,y,z)}^{(x,y,z)}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{p}\\&=\int_0^z t^2\mathrm{d}t+\int_0^y t^2\mathrm{d}t+\int_0^x(t^2-2yz)\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

因此得出了向量场 $\boldsymbol{F}$ 的一个势函数

$$\varphi(\boldsymbol{p})=\frac{1}{3}(x^3+y^3+z^3)-2xyz.$$

对于这个问题，还有另外一种算法．从 O 到点 (x,y,z) 用直线段相连，引入参数方程

$$\xi=xt,\ \eta=yt,\ \zeta=zt,\ 0\leqslant t\leqslant 1.$$

这时

$$\mathrm{d}\xi=x\ \mathrm{d}t,\ \mathrm{d}\eta=y\ \mathrm{d}t,\ \mathrm{d}\zeta=z\ \mathrm{d}t,$$

所以

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{p}&=P\ \mathrm{d}\xi+Q\ \mathrm{d}\eta+R\ \mathrm{d}\zeta\\&=t^2(x(x^2-2yz)+y(y^2-2xz)+z(z^2-2xy))\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{aligned}\varphi(x,y,z)&=(x^3+y^3+z^3-6xyz)\int_0^1 t^2\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{3}(x^3+y^3+z^3)-2xyz,\end{aligned}$$

与第一种算法的结果一致． □

如果向量场 $\boldsymbol{F}$ 在区域 Ω 上有势函数 φ，那么称 $(-\varphi)$ 为 $\boldsymbol{F}$ 的**势能**．

现在设力场 $\boldsymbol{F}$ 是一有势场，质点在这个力场的作用下运动，运动的方程是 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$，时间 $t\in[a,b]$；如果运动满足 Newton 第二定律，那么一定满足**能量守恒定律**．

例 3 在上述条件之下，质点运动时的势能与动能之和等于常数．

证明 设质点的质量为 m，那么动能便是$\frac{1}{2}m(\boldsymbol{r}'(t))^2$，我们只需证明

$$\frac{1}{2}m(\boldsymbol{r}'(t))^2-f\circ\boldsymbol{r}(t) \tag{6}$$

为一常数．将(6)对 t 求导，得出

$$m\boldsymbol{r}'(t)\cdot\boldsymbol{r}''(t)-\nabla f\circ\boldsymbol{r}(t)\cdot\boldsymbol{r}'(t). \tag{7}$$

Newton 第二定律说的是 $m\boldsymbol{r}''(t)=\boldsymbol{F}\circ\boldsymbol{r}(t)$，也就是 $m\boldsymbol{r}''(t)=\nabla f\circ\boldsymbol{r}(t)$，代入(7)式后便得

$$\boldsymbol{r}'(t)\cdot\nabla f\circ\boldsymbol{r}(t)-\nabla f\circ\boldsymbol{r}(t)\cdot\boldsymbol{r}'(t)=0,$$

这正是说：式(6)中的表达式等于常数． □

现在，我们来讨论势函数唯一性问题．

设 $\boldsymbol{F}$ 是区域 Ω 上的有势场，f 和 g 都是 $\boldsymbol{F}$ 的势函数，这也就是说

$$\mathbf{grad}\ f=\mathbf{grad}\ g=\boldsymbol{F}$$

在 Ω 上处处成立，即

$$\frac{\partial}{\partial x}(f-g)=\frac{\partial}{\partial y}(f-g)=\frac{\partial}{\partial z}(f-g)=0.$$

由定理 14.10 的推论，即知 $f-g$ 在 Ω 上是一常数．由此得

定理 19.2 设 $\boldsymbol{F}$ 是区域 Ω 上的有势场，如果不计较常数加项，那么势函数是唯一的．

与向量场的势函数密切相关的是所谓恰当微分形式的概念．设

$$P(x,y,z)\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\mathrm{d}y+R(x,y,z)\mathrm{d}z$$

是定义在开集 $D\subset\mathbf{R}^3$ 上的微分形式，如果存在 D 上的一个 0－形式 φ 使得

$$\mathrm{d}\varphi=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z \tag{8}$$

在 D 上处处成立，那么这个 1－形式 $P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$ 称为 D 上的一个**恰当微分形式**或简称**恰当微分**．

很明显，公式组(5)是判断这个微分形式是恰当微分的必要充分条件．一旦确信它是一个恰当微分之后，也可以用刚刚已指明的办法求出 φ 来，使之满足等式(8)．

在开集 $D\subset\mathbf{R}^2$ 中，方程

$$P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0 \tag{9}$$

称为**恰当微分方程**，如果它的左端是一个恰当微分．设 φ 是向量场 $\boldsymbol{F}=(P,Q)$ 的任一势函数，那么，对任意常数 c，隐函数

$$\varphi(x,y)=c$$

就是微分方程(9)的**通解**．

例 4 求微分方程

$$(x+y+1)\mathrm{d}x+(x-y^2+3)\mathrm{d}y=0 \tag{10}$$

的通解.

解 设

$$P = x + y + 1,\quad Q = x - y^2 + 3,$$

由于成立着等式

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y},$$

所以(10)是一个恰当微分方程. 现在来求向量场 $\boldsymbol{F} = (P, Q)$的一个势函数:

$$\begin{aligned}\varphi(x, y) &= \int_{(0,0)}^{(x,y)} \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{p} = \int_{(0,0)}^{(0,y)} \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{p} + \int_{(0,y)}^{(x,y)} \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{p}\\ &= \int_0^y (3 - t^2)\mathrm{d}t + \int_0^x (t + y + 1)\mathrm{d}t\\ &= 3y - \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{2}x^2 + xy + x.\end{aligned}$$

因此, 方程(10)的通解是

$$\frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{2}x^2 - xy - x - 3y = c,$$

这里 c 为任意常数. □

练习题 19.4

1. 求 $\boldsymbol{F}$ 的势函数:

   (1) $\boldsymbol{F} = \left(1 - \dfrac{1}{y} + \dfrac{y}{z}, \dfrac{x}{z} + \dfrac{x}{y^2}, -\dfrac{xy}{z^2}\right)$;

   (2) $\boldsymbol{F} = \dfrac{1}{x^2 + y^2 + z^2 + 2xy}(x + y, x + y, z)$.

2. 计算下列恰当微分的曲线积分:

   (1) $\displaystyle\int_{(1,1,1)}^{(2,3,-4)} x\mathrm{d}x + y^2\mathrm{d}y - z^2\mathrm{d}z$;

   (2) $\displaystyle\int_{(1,2,3)}^{(0,1,1)} yz\mathrm{d}x + xz\mathrm{d}y + xy\mathrm{d}z$;

   (3) $\displaystyle\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} \frac{x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y + z\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, 其中$(x_1, y_1, z_1)$是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 上的一点, (x_2, y_2, z_2)是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$ 上的一点, 并设 $a > 0$, $b > 0$.

3. 设 f, g, h 为单变量的连续函数, 计算

$$\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} f(x)\mathrm{d}x + g(y)\mathrm{d}y + h(z)\mathrm{d}z.$$

4. 设 f 为单变量的连续函数, 计算

(1) $\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} f(x+y+z)(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y+\mathrm{d}z)$；

(2) $\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z)$.

5. 弹性力的方向指向坐标原点，力的大小与质点到坐标原点的距离成比例. 设此点依反时针方向描绘椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 在第一象限那一段，求弹性力所作的功.

6. 求解下列恰当微分方程：

(1) $x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y=0$；　　(2) $x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}x=0$；

(3) $(x+2y)\mathrm{d}x+(2x+y)\mathrm{d}y=0$；

(4) $(x^2-y)\mathrm{d}x-(x+\sin^2 y)\mathrm{d}y=0$；

(5) $\mathrm{e}^y\mathrm{d}x+(x\mathrm{e}^y-2y)\mathrm{d}y=0$；

(6) $\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2}$；

(7) $\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y$.

§19.5 正交曲线坐标系中梯度、散度和旋度的表达式

为了表达式的对称性，我们暂时放弃过去一些常用的记号. 直角坐标系中的点过去常记为(x,y,z)，目前改记为(x_1,x_2,x_3)；过去我们用(u,v,w)表示参数空间的点，如今则用(u_1,u_2,u_3)来表示.

首先，应当介绍什么叫做"**正交曲线坐标**". 记 $\boldsymbol{p}=(x_1,x_2,x_3)$. 设

$$\boldsymbol{p}=\boldsymbol{f}(u_1,u_2,u_3) \tag{1}$$

是由参数空间中的区域 D 到 $\mathbf{R}^3$ 中的一个映射，也可以把映射(1)写成分量的形式

$$x_i=x_i(u_1,u_2,u_3),\quad i=1,\ 2,\ 3, \tag{2}$$

其中$(u_1,u_2,u_3)\in D$. 再设映射 $\boldsymbol{f}$ 满足下列条件：

1° $\boldsymbol{f}\in C^1(D)$；

2° $\boldsymbol{f}$ 是单射；

3° $\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial u_1}$，$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial u_2}$，$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial u_3}$互相正交；

4° $\det Jf>0$.

于是，映射 f 实现了区域 D 与 $f(D)$ 之间的一对一的、连续可微的可逆映射，$f(D)\subset \mathbf{R}^3$ 也是一个区域，其中的任一点 p 与三数组 $(u_1,u_2,u_3)\in D$ 之间可建立一一对应，这个三数组就称为点 p 的**曲线坐标**. 由于性质 3°成立，可以更精确地称之为点 p 的**正交(的)曲线坐标**，让我们对这一名词多作一些解说.

任意地固定一点 $\boldsymbol{u}_0=(u_1^0,u_2^0,u_3^0)\in D$，那么

$$\boldsymbol{p}_0=(x_1^0,x_2^0,x_3^0)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}_0)\in \boldsymbol{f}(D).$$

单参数的向量函数 $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{f}(u_1,u_2^0,u_3^0)$ 是经过点 $\boldsymbol{p}_0$ 的一条曲线，称为 u_1 曲线，它在点 $\boldsymbol{p}_0$ 处的切向量便是

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial u_1}(\boldsymbol{u}_0).$$

类似地，可以定义 u_2 曲线和 u_3 曲线，它们在点 $\boldsymbol{p}_0$ 处的切向量分别是

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial u_2}(\boldsymbol{u}_0),\ \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial u_3}(\boldsymbol{u}_0).$$

由条件 3°和 4°，这三个切向量组成正交的右手系，这就是称 (u_1,u_2,u_3) 为点的正交曲线坐标的原因. 记

$$h_i=\left\|\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial u_i}\right\|,\quad i=1,\ 2,\ 3,$$

可见 h_1，h_2，h_3 都是正数，它们都是点的函数. 令

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial u_i}=h_i\boldsymbol{e}_i,\quad i=1,\ 2,\ 3,$$

可见 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ 是正交的单位向量，它们组成随着点变化的规范的正交右手系.

(1) **梯度的表示**

设 Φ 是定义在 $\boldsymbol{f}(D)$ 上的一个数量函数. 在直角坐标 $\mathbf{R}^3$ 中，Φ 的梯度 $\nabla\Phi$ 是向量

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1},\frac{\partial \Phi}{\partial x_2},\frac{\partial \Phi}{\partial x_3}\right).$$

现在的问题是：若采用正交坐标 (u_1,u_2,u_3)，将如何来表示这一向量？我们设

$$\nabla\Phi=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\boldsymbol{e}_i,\tag{3}$$

这里 λ_1，λ_2，λ_3 待定. 首先，我们有

$$\mathrm{d}\boldsymbol{p}=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial u_i}\mathrm{d}u_i=\sum_{i=1}^{3}h_i\mathrm{d}u_i\boldsymbol{e}_i,\tag{4}$$

由(3)和(4)可得

$$\nabla \Phi \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{p} = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i h_i \mathrm{d}u_i, \tag{5}$$

另一方面

$$\nabla \Phi \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{p} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i = \mathrm{d}\Phi = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \Phi}{\partial u_i}\mathrm{d}u_i, \tag{6}$$

这里我们已经应用了一阶微分形式的不变性. 将(5)和(6)等同起来，注意到 $\mathrm{d}u_1$，$\mathrm{d}u_2$，$\mathrm{d}u_3$ 是任意的，得到

$$\lambda_i h_i = \frac{\partial \Phi}{\partial u_i}, \quad i = 1, 2, 3.$$

由此得到

$$\lambda_i = \frac{1}{h_i}\frac{\partial \Phi}{\partial u_i}, \quad i = 1, 2, 3,$$

代入(3)可得

$$\nabla \Phi = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{h_i} \frac{\partial \Phi}{\partial u_i}\boldsymbol{e}_i. \tag{7}$$

(2) **散度的表示**

利用公式(7)来计算“坐标函数” u_i 的梯度，立刻得到

$$\nabla u_i = \frac{1}{h_i}\boldsymbol{e}_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

于是有

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \left(\frac{\boldsymbol{e}_1}{h_2 h_3}\right) &= \nabla \cdot \left(\frac{\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3}{h_2 h_3}\right) = \nabla \cdot (\nabla u_2 \times \nabla u_3) \\ &= \Big(\nabla \times (\nabla u_2)\Big) \cdot \nabla u_3 - \Big(\nabla \times (\nabla u_3)\Big) \cdot \nabla u_2 \\ &= 0.\end{aligned}$$

在推导过程中，我们用到了公式

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = (\nabla \times \boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b} - (\nabla \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{a}.$$

这个公式我们已在 §19.3 的旋度运算法则 4°作出证明，不过在那里是在直角坐标系下证明的. 事实上，算子∇这一性质是不依赖于坐标系的，在此不作详细的说明. 欲知其详，可参看张筑生编著的《数学分析新讲》第三册 165 页(北京大学出版社).

类似地有

$$\nabla \cdot \left(\frac{\boldsymbol{e}_2}{h_3 h_1}\right) = \nabla \cdot \left(\frac{\boldsymbol{e}_3}{h_1 h_2}\right) = 0.$$

设 $\boldsymbol{F}$ 为一向量函数，并且

$$\boldsymbol{F} = f_1 \boldsymbol{e}_1 + f_2 \boldsymbol{e}_2 + f_3 \boldsymbol{e}_3$$

$$= f_1 h_2 h_3 \left(\frac{\boldsymbol{e}_1}{h_2 h_3}\right) + f_2 h_3 h_1 \left(\frac{\boldsymbol{e}_2}{h_3 h_1}\right) + f_3 h_1 h_2 \left(\frac{\boldsymbol{e}_3}{h_1 h_2}\right),$$

应有

$$\nabla \cdot \boldsymbol{F} = \nabla (f_1 h_2 h_3) \cdot \left(\frac{\boldsymbol{e}_1}{h_2 h_3}\right) + \nabla (f_2 h_3 h_1) \cdot \left(\frac{\boldsymbol{e}_2}{h_3 h_1}\right) + \nabla (f_3 h_1 h_2) \cdot \left(\frac{\boldsymbol{e}_3}{h_1 h_2}\right).$$

再一次利用公式(7)，可知

$$\nabla (f_1 h_2 h_3) \cdot \left(\frac{\boldsymbol{e}_1}{h_2 h_3}\right) = \frac{1}{h_1} \frac{\partial (f_1 h_2 h_3)}{\partial u_1} \boldsymbol{e}_1 \cdot \frac{\boldsymbol{e}_1}{h_2 h_3} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial (f_1 h_2 h_3)}{\partial u_1},$$

由此推得

$$\nabla \cdot \boldsymbol{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left(\frac{\partial (f_1 h_2 h_3)}{\partial u_1} + \frac{\partial (f_2 h_3 h_1)}{\partial u_2} + \frac{\partial (f_3 h_1 h_2)}{\partial u_3} \right). \tag{8}$$

(3) **旋度的表示**

因为

$$\nabla \times \left(\frac{\boldsymbol{e}_i}{h_i}\right) = \nabla \times (\nabla u_i) = \boldsymbol{0},\ i = 1,\ 2,\ 3,$$

当我们把向量 $\boldsymbol{F}$ 表示为

$$\boldsymbol{F} = \sum_{i=1}^{3} f_i \boldsymbol{e}_i = \sum_{i=1}^{3} f_i h_i \left(\frac{\boldsymbol{e}_i}{h_i}\right)$$

之后，应有

$$\nabla \times \boldsymbol{F} = \sum_{i=1}^{3} \nabla (f_i h_i) \times \left(\frac{\boldsymbol{e}_i}{h_i}\right),$$

由(7)可得

$$\nabla (f_1 h_1) \times \left(\frac{\boldsymbol{e}_1}{h_1}\right) = \frac{1}{h_2} \frac{\partial (f_1 h_1)}{\partial u_2} \boldsymbol{e}_2 \times \frac{\boldsymbol{e}_1}{h_1} + \frac{1}{h_3} \frac{\partial (f_1 h_1)}{\partial u_3} \boldsymbol{e}_3 \times \frac{\boldsymbol{e}_1}{h_1} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left(\frac{\partial (f_1 h_1)}{\partial u_3} (h_2 \boldsymbol{e}_2) - \frac{\partial (f_1 h_1)}{\partial u_2} (h_3 \boldsymbol{e}_3) \right),$$

由此推出

$$\nabla \times \boldsymbol{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \boldsymbol{e}_1 & h_2 \boldsymbol{e}_2 & h_3 \boldsymbol{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial u_1} & \dfrac{\partial}{\partial u_2} & \dfrac{\partial}{\partial u_3} \\ f_1 h_1 & f_2 h_2 & f_3 h_3 \end{vmatrix}. \tag{9}$$

最后，我们计算在正交曲线坐标中 Laplace 算子的表达式．设 Φ 是一数量函数，定义算子 Δ：

$$\Delta\Phi=\nabla\cdot(\nabla\Phi),$$

Δ 叫做 Laplace 算子，这个算子在数学理论的自身和数学诸多的应用中，有着极其重要的作用．在 $\mathbf{R}^3$ 的直角坐标系中，Laplace 算子的表示为

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

在正交的曲线坐标中,我们已经有了公式(7)和公式(8)，因此可以立即得到

$$\Delta\Phi=\frac{1}{h_1h_2h_3}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial u_i}\left(\frac{h_1h_2h_3}{h_i^2}\frac{\partial\Phi}{\partial u_i}\right).\tag{10}$$

下面讨论三个特殊的正交曲线坐标．

例 1　求在极坐标下 Laplace 算子的表达式．

解　我们有

$$\begin{cases}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta,\end{cases}$$

由于

$$\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial r}=(\cos\theta,\sin\theta),$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \theta}=(-r\sin\theta,r\cos\theta),$$

得出

$$\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial r}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \theta}=0,$$

所以极坐标是正交的曲线坐标．这时

$$h_1=\left\|\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial r}\right\|=1,\quad h_2=\left\|\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \theta}\right\|=r,$$

仿照公式(10)，得到

$$\Delta\Phi=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2}.\qquad\square$$

例 2　试写出 ∇ 和 Δ 在柱坐标下的表达式．

解　柱坐标的公式是

$$\begin{cases}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta,\\ z=z.\end{cases}$$

容易算出

$$\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial r}=(\cos\theta,\sin\theta,0),$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \theta}=(-r\sin\theta,r\cos\theta,0),$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial z} = (0,0,1).$$

由此可见柱坐标是正交曲线坐标，并且

$$h_1 = 1,\quad h_2 = r,\quad h_3 = 1.$$

设 Φ 为一数量函数，由公式(7)可知

$$\nabla \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial r}\boldsymbol{e}_1 + \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}\boldsymbol{e}_2 + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\boldsymbol{e}_3.$$

按照公式(10)，便可得出

$$\Delta \Phi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}. \qquad \square$$

例 3 求 Laplace 算子在球坐标中的表达式.

解 由于

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi, \\ y = r\sin\theta\sin\varphi, \\ z = r\cos\theta, \end{cases}$$

所以

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial r} = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta),$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \theta} = (r\cos\theta\cos\varphi, r\cos\theta\sin\varphi, -r\sin\theta),$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \varphi} = (-r\sin\theta\sin\varphi, r\sin\theta\cos\varphi, 0).$$

可见球坐标是正交的曲线坐标，并且

$$h_1 = 1,\quad h_2 = r,\quad h_3 = r\sin\theta.$$

代入公式(10)，得出

$$\Delta \Phi = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}\right),$$

或者

$$\Delta \Phi = \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}\right). \qquad \square$$

练习题 19.5

在柱坐标中，设流体的速度 $\boldsymbol{v}$ 在正交曲线坐标中的分量为 v_r，v_θ，v_z. 求证：这时的连续性方程是

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{1}{r}\frac{\partial(\rho r v_r)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial(\rho v_\theta)}{\partial \theta}+\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}=0.$$

（提示：见 § 19.2 例 4.）

第 20 章　含参变量积分

在第 10 章已经看到，无穷级数是构造新函数的一种重要工具，我们用它构造了处处连续处处不可微的函数，还用它构造了能填满正方形的连续曲线．和无穷级数具有同样重要意义的另一种构造新函数的工具是含参变量的积分．

设二元函数$f(x,u)$在闭矩形$I=[a,b]\times[\alpha,\beta]$上连续，那么对于固定的$u\in[\alpha,\beta]$，函数$f(x,u)$对变量 x 在$[a,b]$上 Riemann 可积，这时称积分

$$\int_a^b f(x,u)\mathrm{d}x$$

是**含参变量 u 的常义积分**．如果对于固定的u，$f(x,u)$是变量 x 在$[a,b]$中的无界函数，或者$[a,b]$是一个无限区间，则称相应的积分是**含参变量 u 的反常积分**．例如积分

$$\int_0^{+\infty} x^{u-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$$

是含参变量 u 的反常积分；积分

$$\int_0^1 x^{u-1}(1-x)^{v-1}\mathrm{d}x$$

当 $u<1$ 或 $v<1$ 时是含两个参变量 u，v 的反常积分．

本章就是要讨论由含参变量的常义积分或反常积分所确定的函数的分析性质，即它们的连续性、可微性，以及如何计算它们的导数和积分；还要研究两个重要的特殊函数——Γ 函数和 B 函数．

§ 20.1　含参变量的常义积分

设二元函数$f(x,u)$在闭矩形$I=[a,b]\times[\alpha,\beta]$上连续，我们要研究由含参变量的常义积分所确定的函数

$$\varphi(u)=\int_a^b f(x,u)\mathrm{d}x$$

的分析性质．首先有

定理 20.1　如果函数 f 在闭矩形$I=[a,b]\times[\alpha,\beta]$上连续，那么

$$\varphi(u)=\int_a^b f(x,u)\mathrm{d}x$$

是区间$[\alpha,\beta]$上的连续函数.

证明 任取$u_0\in[\alpha,\beta]$，我们证明 φ 在u_0处连续. 从

$$\varphi(u)-\varphi(u_0)=\int_a^b(f(x,u)-f(x,u_0))\mathrm{d}x$$

立刻得到

$$|\varphi(u)-\varphi(u_0)|\leqslant\int_a^b|f(x,u)-f(x,u_0)|\mathrm{d}x. \tag{1}$$

由于f在闭矩形I上连续，因而必定一致连续. 故对任意$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，对于闭矩形I中任意两点$(x_1,u_1),(x_2,u_2)$，只要它们的距离小于δ，就有

$$|f(x_1,u_1)-f(x_2,u_2)|<\varepsilon .$$

由于点(x,u)和点(x,u_0)的距离等于$|u-u_0|$，所以当$|u-u_0|<\delta$时，便有

$$|f(x,u)-f(x,u_0)|<\varepsilon$$

对任意$x\in[a,b]$成立. 于是由(1)即得

$$|\varphi(u)-\varphi(u_0)|<\varepsilon(b-a).$$

这就证明了 φ 在u_0处连续. 由于u_0是$[\alpha,\beta]$中任意一点，所以 φ 在$[\alpha,\beta]$中连续. □

注意，φ 在u_0处连续意味着

$$\lim_{u\to u_0}\varphi(u)=\varphi(u_0). \tag{2}$$

而

$$\varphi(u_0)=\int_a^b f(x,u_0)\mathrm{d}x=\int_a^b\lim_{u\to u_0}f(x,u)\mathrm{d}x ,$$

这样，(2)可写为

$$\lim_{u\to u_0}\int_a^b f(x,u)\mathrm{d}x=\int_a^b\lim_{u\to u_0}f(x,u)\mathrm{d}x .$$

这就是说，f 的连续性保证了积分运算和极限运算可以交换次序.

既然φ 在$[\alpha,\beta]$上连续，我们就可讨论 φ 在$[\alpha,\beta]$上的积分

$$\int_\alpha^\beta\varphi(u)\mathrm{d}u=\int_\alpha^\beta\left(\int_a^b f(x,u)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}u .$$

我们的问题是，在计算上述积分时，能否交换积分的次序？也就是说，等式

$$\int_\alpha^\beta\left(\int_a^b f(x,u)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}u=\int_a^b\left(\int_\alpha^\beta f(x,u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}x$$

是否成立？这个问题作为定理 16.19 的一种特殊情形，已经给出了肯定的回答. 为了完整起见，我们把这结果重述于下.

定理 20.2 如果函数f在闭矩形$I=[a,b]\times[\alpha,\beta]$上连续，那么

$$\int_\alpha^\beta \varphi(u)\mathrm{d}u = \int_\alpha^\beta\left(\int_a^b f(x,u)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}u = \int_a^b\left(\int_\alpha^\beta f(x,u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}x. \square$$

这个定理可以帮助我们研究 φ 的微分性质.

定理 20.3　如果函数 f 及其偏导数 $\frac{\partial f}{\partial u}$ 都在闭矩形 $I=[a,b]\times[\alpha,\beta]$ 上连续，那么函数

$$\varphi(u) = \int_a^b f(x,u)\mathrm{d}x$$

在 $[\alpha,\beta]$ 上可微，而且

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\varphi(u) = \int_a^b\left(\frac{\partial}{\partial u}f(x,u)\right)\mathrm{d}x.$$

证明　命

$$g(u) = \int_a^b\left(\frac{\partial}{\partial u}f(x,u)\right)\mathrm{d}x, \alpha \leqslant u \leqslant \beta.$$

任取 $v\in[\alpha,\beta]$，则由定理 20.2 知道，

$$\begin{aligned}\int_\alpha^v g(u)\mathrm{d}u &= \int_\alpha^v\left(\int_a^b \frac{\partial}{\partial u}f(x,u)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}u\\ &= \int_a^b\left(\int_\alpha^v \frac{\partial}{\partial u}f(x,u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}x\\ &= \int_a^b(f(x,v)-f(x,\alpha))\mathrm{d}x\\ &= \varphi(v)-\varphi(\alpha).\end{aligned}$$

由定理 20.1 知道 g 是 $[\alpha,\beta]$ 上的连续函数，让上式对 v 求导数，即得

$$g(v) = \varphi'(v).$$

这就是我们要证明的.　$\square$

这个定理告诉我们，在 f 和 $\frac{\partial f}{\partial u}$ 连续的条件下，微分运算和积分运算的次序可以交换.

例 1　计算积分

$$I = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\log x}\mathrm{d}x, 0 < a < b.$$

解　把被积函数写为

$$\frac{x^b - x^a}{\log x} = \int_a^b x^u \mathrm{d}u,$$

那么

$$I = \int_0^1\left(\int_a^b x^u\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}x.$$

交换积分次序，即得

$$I = \int_a^b \left(\int_0^1 x^u \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}u = \int_a^b \frac{\mathrm{d}u}{u+1} = \log \frac{b+1}{a+1}.$$

还有另外一种计算方法：在上述积分中把 a 看作常数，把 b 看作参变量，应用定理 20.3 可得

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}b} = \int_0^1 x^b \mathrm{d}x = \frac{1}{b+1}.$$

所以

$$I = \log(b+1) + c.$$

显然，当 $b = a$ 时 $I = 0$，因而 $c = -\log(a+1)$，重新得出

$$I = \log \frac{b+1}{a+1}. \quad \square$$

例 2 计算积分

$$I(r) = \int_0^\pi \log(1 - 2r\cos x + r^2)\mathrm{d}x, \ |r| < 1.$$

解 把 r 看成参变量，并对 r 求导数得

$$I'(r) = \int_0^\pi \frac{-2\cos x + 2r}{1 - 2r\cos x + r^2}\mathrm{d}x.$$

由此立得

$$I'(0) = -2\int_0^\pi \cos x\mathrm{d}x = 0. \tag{3}$$

现设 $r \neq 0$,则

$$\begin{aligned} I'(r) &= \frac{1}{r}\int_0^\pi \left(1 - \frac{1-r^2}{1-2r\cos x + r^2}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{r}\left(\pi - (1-r^2)\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}x}{1-2r\cos x + r^2}\right). \end{aligned} \tag{4}$$

作变换 $t = \tan\frac{x}{2}$，可得

$$\begin{aligned} (1-r^2)\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}x}{1-2r\cos x + r^2} &= \frac{1+r}{1-r}\int_0^{+\infty} \frac{2\mathrm{d}t}{1 + \left(\frac{1+r}{1-r}t\right)^2} \\ &= 2\arctan \frac{1+r}{1-r}t \Big|_0^{+\infty} = \pi. \end{aligned}$$

代入(4)，并注意到(3)，即知 $I'(r) = 0$ 对所有 $|r| < 1$ 成立．所以 $I(r) = c$．由于 $I(0) = 0$，于是得

$$\int_0^\pi \log(1 - 2r\cos x + r^2)\mathrm{d}x = 0, \ |r| < 1. \quad \square$$

在很多问题中，经常要遇到这样的情形，不仅被积函数含有参变数，积分

限也含有参变数. 这时积分可写为

$$\psi(u)=\int_{p(u)}^{q(u)}f(x,u)\mathrm{d}x. \tag{5}$$

对于这样的含参变量积分，我们有

定理 20.4 设函数 f 在闭矩形 $I=[a,b]\times[\alpha,\beta]$ 上连续，函数 $p(u)$，$q(u)$ 都在 $[\alpha,\beta]$ 上连续，而且当 $\alpha\leqslant u\leqslant\beta$ 时，$a\leqslant p(u)\leqslant b$，$a\leqslant q(u)\leqslant b$，那么由(5)所确定的函数 ψ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续.

证明 任取 $u_0\in[\alpha,\beta]$，则当 $u\in[\alpha,\beta]$ 时，有

$$\psi(u)-\psi(u_0)=\int_{p(u)}^{q(u)}f(x,u)\mathrm{d}x-\int_{p(u_0)}^{q(u_0)}f(x,u_0)\mathrm{d}x.$$

由于

$$\begin{aligned}\int_{p(u)}^{q(u)}f(x,u)\mathrm{d}x&=\int_{p(u)}^{p(u_0)}f(x,u)\mathrm{d}x+\int_{p(u_0)}^{q(u_0)}f(x,u)\mathrm{d}x\\&\quad+\int_{q(u_0)}^{q(u)}f(x,u)\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\psi(u)-\psi(u_0)&=\int_{p(u)}^{p(u_0)}f(x,u)\mathrm{d}x+\int_{q(u_0)}^{q(u)}f(x,u)\mathrm{d}x\\&\quad+\int_{p(u_0)}^{q(u_0)}(f(x,u)-f(x,u_0))\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

根据定理 20.1，当 $u\to u_0$ 时，最后一个积分趋于 0. 而前面两个积分的绝对值分别不超过

$$M|p(u)-p(u_0)|,M|q(u)-q(u_0)|,$$

其中 M 是 f 在 I 上的最大值. 根据 $p(u),q(u)$ 的连续性，当 $u\to u_0$ 时，它们也都趋于 0. 因此

$$\lim_{u\to u_0}\psi(u)=\psi(u_0). \qquad \square$$

关于 ψ 的微分性质有

定理 20.5 如果函数 f 和 $\dfrac{\partial f}{\partial u}$ 都在闭矩形 $I=[a,b]\times[\alpha,\beta]$ 上连续；函数 $p(u),q(u)$ 都在 $[\alpha,\beta]$ 上可微，而且当 $\alpha\leqslant u\leqslant\beta$ 时，$a\leqslant p(u)\leqslant b,a\leqslant q(u)\leqslant b$，那么由(5)确定的函数 ψ 在 $[\alpha,\beta]$ 上可微，而且

$$\psi'(u)=\int_{p(u)}^{q(u)}\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\mathrm{d}x+f(q(u),u)q'(u)-f(p(u),u)p'(u).$$

证明 记

$$F(u,\xi,\eta)=\int_{\xi}^{\eta}f(x,u)\mathrm{d}x,$$

那么$\psi(u)=F(u,p(u),q(u))$. 由定理 19.3,

$$\frac{\partial F}{\partial u}=\int_\xi^\eta\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\mathrm{d}x .$$

再由对变上限积分求导的法则得

$$\frac{\partial F}{\partial \eta}=f(\eta,u),\frac{\partial F}{\partial \xi}=-f(\xi,u).$$

于是由复合函数的求导法则，即得

$$\begin{aligned}\psi'(u)&=\frac{\partial F}{\partial u}+\frac{\partial F}{\partial \xi}\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}u}+\frac{\partial F}{\partial \eta}\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}u}\\&=\int_{p(u)}^{q(u)}\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\mathrm{d}x+f(q(u),u)q'(u)-f(p(u),u)p'(u).\end{aligned}$$

这就是要证的结果. □

练习题 20.1

1. 求极限:

(1) $\lim\limits_{a\to0}\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x$;

(2) $\lim\limits_{t\to0}\int_0^2 x^2\cos tx\mathrm{d}x$.

2. 设 f 是可微函数，命

$$F(u)=\int_0^u(x+u)f(x)\mathrm{d}x,$$

计算$F''(u)$.

3. 设 f 在$[a,A]$上连续，证明

$$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_a^x(f(t+h)-f(t))\mathrm{d}t=f(x)-f(a),a<x<A.$$

4. 计算下列函数的导数:

(1) $f(x)=\int_{\sin x}^{\cos x}\mathrm{e}^{(1+t)^2}\mathrm{d}t$;

(2) $f(x)=\int_x^{x^2}\mathrm{e}^{-x^2u^2}\mathrm{d}u$;

(3) $f(x)=\int_{a+x}^{b+x}\frac{\sin xt}{t}\mathrm{d}t$;

(4) $f(u)=\int_0^u g(x+u,x-u)\mathrm{d}x$.

5. 设 φ,ψ 分别可以微分两次和一次，证明

$$u(x,t)=\frac{1}{2}(\varphi(x-at)+\varphi(x+at))+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(s)\mathrm{d}s$$

满足弦振动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

6. 设 f 在闭区间 $[0,a]$ 上连续，且当 $t\in[0,a]$ 时，$(x-t)^2+y^2+z^2\neq 0$，证明函数

$$u(x,y,z)=\int_0^a\frac{f(t)\mathrm{d}t}{\sqrt{(x-t)^2+y^2+z^2}}$$

满足 Laplace 方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0.$$

7. 设 $a<b$，f 为可微分的函数，命

$$\varphi(u)=\int_a^b f(x)\mid x-u\mid \mathrm{d}x,$$

计算 $\varphi''(u)$.

8. 在区间 $[1,3]$ 上用线性函数 $a+bx$ 近似代替函数 $f(x)=x^2$，试选取 a，b，使得

$$\int_1^3(a+bx-x^2)^2\mathrm{d}x$$

取最小值.

问题 20.1

1. 证明 n 阶 Bessel 函数

$$J_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(n\varphi-x\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi$$

满足 Bessel 方程

$$x^2J_n''(x)+xJ_n'(x)+(x^2-n^2)J_n(x)=0.$$

2. 利用对参数的微分法，计算下列积分：

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log(a^2\sin^2x+b^2\cos^2x)\mathrm{d}x$;

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\frac{\mathrm{d}x}{\cos x}$, $\mid a\mid<1$;

(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\arctan(a\tan x)}{\tan x}\mathrm{d}x$.

3. 证明：对任意实数 u，有

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{u\cos x}\cos(u\sin x)\mathrm{d}x = 1.$$

§20.2 含参变量反常积分的一致收敛

设 $f(x,u)$ 在 $[a,+\infty)\times[\alpha,\beta]$ 上连续，如果对 $[\alpha,\beta]$ 中的任意 u，反常积分

$$\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$$

都收敛，那么它就确定了 $[\alpha,\beta]$ 上的一个函数

$$\varphi(u) = \int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x. \tag{1}$$

如何研究 φ 的连续、可微等分析性质？

在第 10 章中已经看到，研究由函数项级数所确定的函数的分析性质时，函数项级数的一致收敛概念起了关键的作用. 对(1)型的积分来说，类似的概念也起着同样重要的作用.

设积分 $\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$ 对任意 $u\in[\alpha,\beta]$ 都收敛，那么对任意 $\varepsilon>0$，存在 A_0，当 $A>A_0$ 时，有不等式

$$\left|\int_a^A f(x,u)\mathrm{d}x - \int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x\right| = \left|\int_A^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon .$$

这里的 A_0 既与 ε 有关，也与参变量 u 有关.

概括这样的考察，就引出下面的类似于函数项级数的一致收敛概念.

定义 20.1 如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$，总能找到仅与 ε 有关的 $A_0(>a)$，当 $A>A_0$ 时，不等式

$$\left|\int_A^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon$$

对 $[\alpha,\beta]$ 上所有的 u 成立，就说反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$ **关于 u 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛**.

对于瑕积分也有类似的定义.

定义 20.2 设 a 是瑕点. 如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在仅与 ε 有关的 $\delta_0>0$，当 $0<\delta<\delta_0$ 时，不等式

$$\left|\int_a^{a+\delta} f(x,u)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon$$

对$[\alpha,\beta]$上所有的 u 成立，就称积分$\int_a^b f(x,u)\mathrm{d}x$ **关于 u 在$[\alpha,\beta]$上一致收敛**.

上面两个定义中的$[\alpha,\beta]$可以换成开区间或无穷区间.

和反常积分的收敛判别法一样,这里也有一系列和无穷级数类似的一致收敛判别法.下面我们只对无穷积分来讨论这些判别法,对于瑕积分也有类似的结果,就不再一一说明了.

记

$$\eta(A)=\sup_{u\in[\alpha,\beta]}\left|\int_A^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x\right|.$$

从定义 20.1 立刻可得

定理 20.6 积分$\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$ 在$[\alpha,\beta]$上一致收敛的充分必要条件是

$$\lim_{A\to+\infty}\eta(A)=0.$$

证明是显然的,留给读者作练习. □

例 1 讨论积分$\int_0^{+\infty} u\mathrm{e}^{-xu}\mathrm{d}x\,(u\geqslant 0)$ 的一致收敛性.

解 当 $u>0$ 时,命 $xu=t$,那么

$$\int_A^{+\infty} u\mathrm{e}^{-xu}\mathrm{d}x=\int_{uA}^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{-uA}.$$

所以

$$\eta(A)=\sup_{u\in(0,+\infty)}\left|\int_A^{+\infty} u\mathrm{e}^{-xu}\mathrm{d}x\right|=1\not\to 0,$$

故由定理 20.6 知道，积分$\int_0^{+\infty} u\mathrm{e}^{-xu}\mathrm{d}x$ 在$(0,+\infty)$上不一致收敛.但若任取 $\delta>0$,考虑它在$[\delta,+\infty)$上的一致收敛性,那么由于

$$\eta(A)=\sup_{u\in[\delta,+\infty)}\left|\int_A^{+\infty} u\mathrm{e}^{-xu}\mathrm{d}x\right|=\mathrm{e}^{-\delta A}\to 0\,(A\to+\infty),$$

故由定理 20.6 知道它在$[\delta,+\infty)$上一致收敛. □

定理 20.7 (Cauchy 收敛原理) 积分$\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$ 在$[\alpha,\beta]$上一致收敛的充分必要条件是,对任意 $\varepsilon>0$,存在仅与 ε 有关的A_0,当 $A',A''>A_0$ 时,不等式

$$\left|\int_{A'}^{A''} f(x,u)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon$$

对$[\alpha,\beta]$中所有的 u 都成立.

证明留给读者作练习. □

从 Cauchy 收敛原理立刻可以推出下面的

定理 20.8 (Weierstrass 判别法)　设$f(x,u)$对 x 在$[a,+\infty)$上连续．如果存在$[a,+\infty)$上的连续函数 F，使得$\int_a^{+\infty}F(x)\mathrm{d}x$ 收敛，而且对一切充分大的 x 及$[\alpha,\beta]$上的一切 u，都有

$$|f(x,u)|\leqslant F(x),$$

那么积分$\int_a^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}x$ 在$[\alpha,\beta]$上一致收敛．

证明　因为$\int_a^{+\infty}F(x)\mathrm{d}x$ 收敛，故对任意 $\varepsilon>0$，存在 A_0，只要 $A',A''>A_0$，便有

$$\left|\int_{A'}^{A''}F(x)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon.$$

由此便知

$$\left|\int_{A'}^{A''}f(x,u)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_{A'}^{A''}|f(x,u)|\mathrm{d}x\leqslant\int_{A'}^{A''}F(x)\mathrm{d}x<\varepsilon.$$

因而$\int_a^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}x$ 在$[\alpha,\beta]$上一致收敛．□

例 2　证明积分

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(\alpha+u^2)t}\sin t\mathrm{d}t,\alpha>0$$

在$u\in[0,+\infty)$中一致收敛．

证明　因为对任意$u\in[0,+\infty)$有不等式

$$|\mathrm{e}^{-(\alpha+u^2)t}\sin t|\leqslant\mathrm{e}^{-\alpha t},0\leqslant t<+\infty,$$

而$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{d}t$ 收敛，故由 Weierstrass 判别法知道，积分$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(\alpha+u^2)t}\sin t\mathrm{d}t$ 在 $u\in[0,+\infty)$中一致收敛．□

例 3　证明积分

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(\alpha+u^2)t}\sin t\mathrm{d}u,a>0$$

在$t\in[0,+\infty)$中一致收敛．

证明　对任意给定的 $\varepsilon>0$，要证明存在 $A_0>0$，使得当 $A>A_0$ 时，不等式

$$\left|\int_A^{+\infty}\mathrm{e}^{-(\alpha+u^2)t}\sin t\mathrm{d}u\right|<\varepsilon\tag{2}$$

对每个$t\in[0,+\infty)$成立．

先证明存在 $\delta>0$，当$t\in[0,\delta)$时，不等式(2)对任意 $A>0$ 成立．由于当 $t\to0$ 时，

$$\frac{e^{-\alpha t}\sin t}{\sqrt{t}}\to 0,$$

故存在 $\delta>0$，当 $0<t<\delta$ 时，$\left|\frac{e^{-\alpha t}\sin t}{\sqrt{t}}\right|<\frac{2\varepsilon}{\sqrt{\pi}}$. 于是

$$\left|\int_A^{+\infty} e^{-(\alpha+u^2)t}\sin t\,du\right| = \left|e^{-\alpha t}\sin t\int_A^{+\infty} e^{-tu^2}du\right|$$

$$=\left|\frac{e^{-\alpha t}\sin t}{\sqrt{t}}\int_{\sqrt{t}A}^{+\infty} e^{-x^2}dx\right| < \frac{2\varepsilon}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \varepsilon.$$

由于 $t=0$ 时，(2)显然成立．因而当 $t\in[0,\delta)$ 时，(2)对任意 $A>0$ 都成立.

当 $\delta\leqslant t<+\infty$ 时，由于

$$|e^{-(\alpha+u^2)t}\sin t|\leqslant e^{-\delta(\alpha+u^2)}\leqslant e^{-\delta u^2},$$

而 $\int_0^{+\infty} e^{-\delta u^2}du$ 收敛，故由 Weierstrass 判别法知道，积分 $\int_0^{+\infty} e^{-(\alpha+u^2)t}\sin t\,du$ 在 $t\in[\delta,+\infty)$ 中一致收敛，因而存在 $A_0>0$，当 $A>A_0$ 时，(2) 对所有 $t\in[\delta,+\infty)$ 成立.综合上面的讨论，当 $A>A_0$ 时，(2) 对任意 $t\in[0,+\infty)$ 成立. □

例 2 和例 3 的结论将在 § 20.3 的例 4 中用到.

更细致的判别法有

定理 20.9（Dirichlet 判别法） 如果 f，g 满足下面两个条件：

1° 当 $A\to+\infty$ 时，积分 $\int_a^A f(x,u)dx$ 对 $u\in[\alpha,\beta]$ 一致有界，即存在常数 M，使得当 A 充分大时，对每个 $u\in[\alpha,\beta]$ 有

$$\left|\int_a^A f(x,u)dx\right|\leqslant M;$$

2° $g(x,u)$ 是 x 的单调函数，且当 $x\to+\infty$ 时关于 u 一致地趋于 0.

那么积分

$$\int_a^{+\infty} f(x,u)g(x,u)dx$$

在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛.

证明 因为 $g(x,u)$ 关于 x 是单调的，故可用推广的第二积分平均值定理：

$$\int_{A'}^{A''} f(x,u)g(x,u)dx = g(A',u)\int_{A'}^{\xi} f(x,u)dx + g(A'',u)\int_{\xi}^{A''} f(x,u)dx,$$

其中 $\xi\in[A',A'']$. 由条件 1°，对任意 A'，$A''>a$ 及一切 $u\in[\alpha,\beta]$ 有

$$\left|\int_{A'}^{\xi} f(x,u)dx\right|\leqslant\left|\int_a^{\xi} f(x,u)dx\right|+\left|\int_a^{A'} f(x,u)dx\right|\leqslant 2M,$$

$$\left|\int_{\xi}^{A''} f(x,u)\mathrm{d}x\right| \leqslant \left|\int_{a}^{A''} f(x,u)\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{a}^{\xi} f(x,u)\mathrm{d}x\right| \leqslant 2M.$$

由条件 2°，对任意 $\varepsilon>0$，存在 $A_0>a$，只要 $x>A_0$，便有

$$|g(x,u)|<\frac{\varepsilon}{4M}$$

对一切 $u\in[\alpha,\beta]$成立．于是取 A'，$A''>A_0$，即得

$$\left|\int_{A'}^{A''} f(x,u)g(x,u)\mathrm{d}x\right| \leqslant \varepsilon, u\in[\alpha,\beta].$$

故由 Cauchy 收敛原理，积分$\int_a^{+\infty} f(x,u)g(x,u)\mathrm{d}x$ 在$[\alpha,\beta]$上一致收敛． □

定理 20.10（Abel 判别法） 如果 f，g 满足下面两个条件：

1° 积分 $\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$ 关于 $u\in[\alpha,\beta]$ 一致收敛；

2° $g(x,u)$ 对 x 单调，且关于 u 一致有界．

那么积分

$$\int_a^{+\infty} f(x,u)g(x,u)\mathrm{d}x$$

在$[\alpha,\beta]$上一致收敛．

证明留给读者作练习． □

在实际情况中，经常遇到的是 f，g 两个因子中只有一个包含参变量 u，这时定理 20.9 和定理 20.10 叙述起来就可简单些．例如 Abel 判别法就可写成：

如果积分$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，函数 $g(x,u)$ 对 x 单调，且关于 $u\in[\alpha,\beta]$ 一致有界，那么积分

$$\int_a^{+\infty} f(x)g(x,u)\mathrm{d}x$$

在$[\alpha,\beta]$上一致收敛．

例 4 证明积分$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xu}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 在$[0,+\infty)$上一致收敛．

证明 因为$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 收敛，而函数 e^{-xu} 对于 x 递减，且$\mathrm{e}^{-xu}\leqslant 1$ 对 $x\in[0,+\infty)$ 和 $u\in[0,+\infty)$ 成立．故由 Abel 判别法知原积分在$[0,+\infty)$中一致收敛． □

例 5 证明积分$\int_0^{+\infty}\frac{x\sin ux}{a^2+x^2}\mathrm{d}x$ 在$[\delta,+\infty)$中一致收敛，这里 a 及 $\delta>0$ 是常数．

证明 对任意 $A>0$，有

$$\left|\int_0^A \sin ux\mathrm{d}x\right| = \frac{1-\cos uA}{u} \leqslant \frac{2}{\delta}.$$

另一方面，当 $x\to+\infty$ 时，函数 $\dfrac{x}{a^2+x^2}$ 递减趋于 0. 故由 Dirichlet 判别法知该积分在 $[\delta,+\infty)$ 上一致收敛. □

例 6　讨论积分

$$\int_0^1 \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^p}\mathrm{d}x \tag{3}$$

在 $0<p<2$ 中的一致收敛性.

解　在 § 11.3 的例 5 中，我们已经证明积分(3)在 $2\leqslant p<\infty$ 时发散，在 $0<p<1$ 时绝对收敛，在 $1\leqslant p<2$ 时条件收敛.

现在我们证明，(3)在 $0<p\leqslant 2-\delta$ 时一致收敛，其中 δ 是任意正数. 和 § 11.3 例 5 中的做法一样，通过变换 $\dfrac{1}{x}=t$，(3)就变成下面的无穷积分

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t^{2-p}}\mathrm{d}t. \tag{4}$$

由于 $0<p\leqslant 2-\delta$，$2-p\geqslant\delta$，所以

$$\frac{1}{t^{2-p}}\leqslant\frac{1}{t^{\delta}}.$$

因此当 $t\to+\infty$ 时，$\dfrac{1}{t^{2-p}}$ 递减一致地趋于 0，另外

$$\left|\int_1^A \sin t\,\mathrm{d}t\right|\leqslant 2.$$

故由 Dirichlet 判别法知道(4)一致收敛.

但(4)在 $0<p<2$ 时非一致收敛. 因为如果(4)在 $0<p<2$ 时一致收敛，则对任意 $\varepsilon>0$，存在 $A_0>1$，只要 $A''>A'>A_0$，便有

$$\left|\int_{A'}^{A''}\frac{\sin t}{t^{2-p}}\mathrm{d}t\right|<\varepsilon \tag{5}$$

对任意 $0<p<2$ 成立. 今取 $A'=2k\pi$，$A''=(2k+1)\pi$，则当 k 充分大时，当然有 $A''>A'>A_0$，于是由(5)得

$$\begin{aligned}\varepsilon &> \left|\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}\frac{\sin t}{t^{2-p}}\mathrm{d}t\right|\geqslant\frac{1}{((2k+1)\pi)^{2-p}}\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}\sin t\,\mathrm{d}t\\ &=\frac{2}{((2k+1)\pi)^{2-p}},\end{aligned}$$

因为上面的不等式对任意 $0<p<2$ 都成立，让 $p\to 2$，即得 $\varepsilon\geqslant 2$. 这当然是不可能的. □

回忆 § 10.3 定理 10.9：如果 $[a,b]$ 上的可积函数列 $\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 f，那么 f 也在 $[a,b]$ 可积，而且

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

如果把$[a,b]$换成无穷区间$[a,+\infty)$，即使$\{f_n\}$在$[a,+\infty)$上一致收敛于f，上面的等式也不一定成立．例如

$$f_n(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{n}, & 0\leqslant x\leqslant n^2,\\ 0, & x>n^2.\end{cases}$$

从定义即得

$$0\leqslant f_n(x)\leqslant\frac{1}{n}, x\in[0,+\infty).$$

故$\{f_n\}$在$[0,+\infty)$上一致收敛于0，而

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}f_n(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_0^{n^2}\frac{1}{n}\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}n = +\infty\neq 0.$$

作为反常积分一致收敛概念的一个应用，我们给出在无穷区间上极限号和积分号交换的条件．

定理 20.11　设函数列$\{f_n\}$在$[a,+\infty)$上收敛于f.如果

1°　对任意$A>a$，$\{f_n\}$在$[a,A]$上一致收敛；

2°　积分$\int_a^{+\infty}f_n(x)\mathrm{d}x$对$n$一致收敛，

那么积分$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$收敛，而且

$$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_a^{+\infty}f_n(x)\mathrm{d}x. \tag{6}$$

证明　由条件2°，对任意$\varepsilon>0$，存在$A_0>a$，当$A''>A'>A_0$时，便有

$$\left|\int_{A'}^{A''}f_n(x)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon \tag{7}$$

对$n=1,2,\cdots$成立．因为$\{f_n\}$在$[A',A'']$上可积，且在$[A',A'']$上一致收敛于f，故由定理10.9，在(7)中取$n\to\infty$的极限，即得

$$\left|\int_{A'}^{A''}f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \varepsilon .$$

这就证明了$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$收敛.于是存在$A_1>a$，使得

$$\left|\int_{A_1}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x\right| < \frac{\varepsilon}{3}, \left|\int_{A_1}^{+\infty}f_n(x)\mathrm{d}x\right| < \frac{\varepsilon}{3}, n=1,2,\cdots.$$

由条件1°，对任意$\varepsilon>0$，存在N，当$n>N$时，

$$|f_n(x)-f(x)| < \frac{\varepsilon}{3(A_1-a)}$$

对$[a,A_1]$中所有的 x 成立．因而当 $n>N$ 时，

$$\begin{aligned}&\left|\int_a^{+\infty}f_n(x)\mathrm{d}x-\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x\right|\\ \leqslant&\int_a^{A_1}|f_n(x)-f(x)|\mathrm{d}x+\left|\int_{A_1}^{+\infty}f_n(x)\mathrm{d}x\right|+\left|\int_{A_1}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x\right|\\ <&\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.\end{aligned}$$

因而(6)成立． □

例 7 计算积分 $\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x}\mathrm{d}x,0<p<1$.

解 因为 $x=0$ 是瑕点，把积分写成两部分

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x}\mathrm{d}x&=\int_0^1\frac{x^{p-1}}{1+x}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x}\mathrm{d}x\\&=I_1+I_2.\end{aligned}$$

对于积分 I_1，因为 $0<x<1$，故有展开式

$$\frac{x^{p-1}}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{n+p-1},$$

这个级数在(0,1)中的任何闭区间上一致收敛，如果记它的部分和为 f_n，那么 $\{f_n\}$在(0,1)的任何闭区间上一致收敛．由于

$$\begin{aligned}0\leqslant f_n(x)&=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k x^{k+p-1}=\frac{x^{p-1}(1-(-1)^n x^n)}{1+x}\\&\leqslant 2\frac{x^{p-1}}{1+x}\leqslant 2x^{p-1},\end{aligned}$$

而 $\int_0^1 x^{p-1}\mathrm{d}x$ 收敛，故 $\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x$ 关于 n 一致收敛．于是由定理 20.11，

$$I_1=\int_0^1\frac{x^{p-1}}{1+x}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^1 x^{n+p-1}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+p}.$$

对于积分 I_2，作变换 $x=\frac{1}{t}$，即得

$$\begin{aligned}I_2&=\int_0^1\frac{t^{-p}}{1+t}\mathrm{d}t=\int_0^1\frac{t^{(1-p)-1}}{1+t}\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1-p}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{p-n}.\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x}\mathrm{d}x&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{p+n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{p-n}\\&=\frac{1}{p}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2p}{p^2-n^2}.\end{aligned}$$

在 § 12.2 中(见 § 12.2 的(7))，我们已经证明

$$\frac{\pi}{\sin p\pi}=\frac{1}{p}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2p}{p^2-n^2}.$$

故最后得

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{\sin p\pi},\quad 0<p<1.\quad\square$$

这个积分在证明 Γ 函数的**余元公式**(定理 20.25)时将要用到.

例 8　计算积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{1+u^4}$.

解　作变量代换 $u^4=t$，利用例 7 的结果，立刻可得

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{1+u^4}=\frac{1}{4}\int_0^{+\infty}\frac{t^{-\frac{3}{4}}}{1+t}\mathrm{d}t=\frac{1}{4}\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.\quad\square$$

练习题　20.2

1. 研究下列反常积分在指定区间上的一致收敛性：

(1) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ux}\sin x\mathrm{d}x,\quad 0<u_0\leqslant u<+\infty$;

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2\cos ux}{1+x^4}\mathrm{d}x,\quad -\infty<u<+\infty$;

(3) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+(x+u)^2},\quad 0\leqslant u<+\infty$;

(4) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha x}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x,\quad 0\leqslant\alpha<+\infty$;

(5) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\sqrt{u}\,\mathrm{e}^{-ux^2}\mathrm{d}x,\quad 0\leqslant u<+\infty$.

2. 证明：积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin ux}{x}\mathrm{d}x$ 在任何不包含 $u=0$ 的闭区间 $[a,b]$ 上一致收敛，在包含 $u=0$ 的闭区间上非一致收敛.

3. 证明：积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin 3x}{x+u}\mathrm{e}^{-ux}\mathrm{d}x$ 在 $u\in[0,\infty)$ 中一致收敛.

4. 设 $f(x,u)$ 在 $[a,+\infty)\times[\alpha,\beta]$ 中连续. 如果对每个 $u\in[\alpha,\beta)$，积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}x$ 都收敛，但积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty}f(x,\beta)\mathrm{d}x$ 发散，证明 $\displaystyle\int_a^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,\beta)$ 上非一致收敛.

问题　20.2

1. 证明积分 $\int_0^{+\infty}\frac{x\sin\alpha x}{\alpha(1+x^2)}\mathrm{d}x$ 在 $\alpha\in[\eta,+\infty)$ 中一致收敛，在 $\alpha\in(0,\delta)$ 中不一致收敛，这里 η 和 δ 是任意正数.

2. 证明积分 $\int_1^{+\infty}\mathrm{e}^{-\left(x-\frac{1}{\alpha}\right)^2/\alpha^2}\mathrm{d}x$ 在 $\alpha\in(0,1]$ 中一致收敛，但不能用 Weierstrass 判别法来判断.

3. 证明积分 $\int_a^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛的充分必要条件是，对任一递增趋于 $+\infty$ 的数列 $\{A_n\}$ $(A_1=a)$，函数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_n}^{A_{n+1}}f(x,u)\mathrm{d}x$$

在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛.

§ 20.3　含参变量反常积分的性质

设含参变量的反常积分 $\int_a^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}x$ 对 $[\alpha,\beta]$ 中每个 u 都收敛，我们要研究由它所确定的函数

$$\varphi(u)=\int_a^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}x \tag{1}$$

的性质.

与连续函数项级数的一致收敛性保证了级数和函数的连续性一样，积分(1)的一致收敛性保证了 φ 的连续性.

定理 20.12　如果函数 $f(x,u)$ 在 $[a,+\infty)\times[\alpha,\beta]$ 上连续，而且积分 $\int_a^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛，那么由(1)所确定的函数 φ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续.

证明　由于 $\int_a^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛，故对任意 $\varepsilon>0$，存在 $A_0>a$，使得不等式

$$\left|\int_{A_0}^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}x\right|<\frac{\varepsilon}{3}$$

对$[\alpha,\beta]$中所有的 u 成立. 由定理 20.1 知道, $\int_a^{A_0} f(x,u)\mathrm{d}x$ 是$[\alpha,\beta]$中的连续函数, 因而对任意 $u_0\in[\alpha,\beta]$, 任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 当 $u\in[\alpha,\beta]$ 且 $|u-u_0|<\delta$ 时,

$$\left|\int_a^{A_0} f(x,u)\mathrm{d}x-\int_a^{A_0} f(x,u_0)\mathrm{d}x\right|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

于是当$u\in[\alpha,\beta]$且$|u-u_0|<\delta$时,

$$\begin{aligned}|\varphi(u)-\varphi(u_0)| &= \left|\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x-\int_a^{+\infty} f(x,u_0)\mathrm{d}x\right| \\ &\leqslant \left|\int_a^{A_0} f(x,u)\mathrm{d}x-\int_a^{A_0} f(x,u_0)\mathrm{d}x\right| \\ &\quad+\left|\int_{A_0}^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x\right|+\left|\int_{A_0}^{+\infty} f(x,u_0)\mathrm{d}x\right| \\ &<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.\end{aligned}$$

这就证明了 φ 在 u_0 处是连续的. 由于 u_0 是$[\alpha,\beta]$中的任意点, 所以 φ 在$[\alpha,\beta]$上连续. □

这个定理也可写成

$$\lim_{u\to u_0}\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty} f(x,u_0)\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty}(\lim_{u\to u_0} f(x,u))\mathrm{d}x.$$

即在积分一致收敛的条件下, 极限号与积分号可以交换.

例 1　讨论函数

$$\varphi(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^\alpha(2+x^3)}\mathrm{d}x$$

的连续性区间.

解　先看函数$\varphi(\alpha)$的定义域是什么, 即上述积分在什么范围内收敛. 在 $x=0$ 附近,

$$\frac{\arctan x}{x^\alpha(2+x^3)}\sim\frac{1}{2}\frac{1}{x^{\alpha-1}},$$

所以当 $\alpha<2$ 时, 积分 $\int_0^1\frac{\arctan x}{x^\alpha(2+x^3)}\mathrm{d}x$ 收敛. 当 $x\to+\infty$ 时,

$$\frac{\arctan x}{x^\alpha(2+x^3)}\sim\frac{\pi}{2}\frac{1}{x^{\alpha+3}},$$

所以积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^\alpha(2+x^3)}\mathrm{d}x$ 当 $\alpha>-2$ 时收敛. 由此得知 $\varphi(\alpha)$ 的定义域是 $(-2,2)$. 我们证明 φ 在$(-2,2)$上连续, 为此只需证明 φ 在任意$[a,b]\subset(-2,2)$上连续就行了. 根据定理 20.12, 只要证明上面的积分在$[a,b]$上一致收敛.

当$x\in(0,1)$时, 设 $a\leqslant b<2$, 这时存在常数 c, 使得

$$\frac{\arctan x}{x^{\alpha}(2+x^3)} \leqslant \frac{c}{x^{\alpha-1}} \leqslant \frac{c}{x^{b-1}},$$

而 $b-1<1$，故由比较判别法，积分 $\int_0^1 \frac{\arctan x}{x^{\alpha}(2+x^3)}\mathrm{d}x$ 在 $(-\infty,b]$ 上一致收敛.

当 $x\in[1,+\infty)$ 时，设 $-2<a\leqslant\alpha$，

$$\frac{\arctan x}{x^{\alpha}(2+x^3)} \leqslant \frac{\pi}{2}\frac{1}{x^{\alpha+3}} \leqslant \frac{\pi}{2}\frac{1}{x^{a+3}},$$

而 $a+3>1$，故由比较判别法，积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^{\alpha}(2+x^3)}\mathrm{d}x$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致收敛.

把两个积分合在一起，即知 $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^{\alpha}(2+x^3)}\mathrm{d}x$ 在 $[a,b]\subset(-2,2)$ 上一致收敛，故 φ 在 $(-2,2)$ 上连续. □

与级数的情形一样，积分的一致收敛只是保证 φ 连续的一个充分条件，并不必要. 但在 f 非负的条件下，积分的一致收敛便是 φ 连续的必要条件. 我们有下面的

定理 20.13 (Dini) 设 $f(x,u)$ 在 $[a,+\infty)\times[\alpha,\beta]$ 上连续且非负. 如果由 (1) 定义的 φ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续，那么积分 $\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛.

证明 把 φ 写成下列级数的和：

$$\varphi(u) = \int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{a+n-1}^{a+n} f(x,u)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(u),$$

其中

$$a_n(u) = \int_{a+n-1}^{a+n} f(x,u)\mathrm{d}x,\ n=1,2,\cdots.$$

根据 f 连续和非负的假定，知道 $a_n(u)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上也是连续而且非负的，因而由 Dini 定理(定理 10.8′)知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(u)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛. 所以对任意 $\varepsilon>0$，存在 N，使得不等式

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n(u) < \varepsilon$$

对 $[\alpha,\beta]$ 中所有的 u 成立. 今取 $A_0=a+N$，由于 f 非负，故当 $A>A_0$ 时，对任意 $u\in[\alpha,\beta]$ 有

$$\int_A^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x \leqslant \int_{A_0}^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x = \sum_{n=N+1}^{\infty}\int_{a+n-1}^{a+n} f(x,u)\mathrm{d}x$$

$$= \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n(u) < \varepsilon.$$

这就证明了 $\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛. □

和级数的情形一样，这里的$[\alpha,\beta]$必须是有界的闭区间，否则定理将不成立．这样的例子见问题 20.3 中的第 2 题．

关于 φ 的积分，我们有

定理 20.14 设$[\alpha,\beta]$是一有限区间，那么在定理 20.12 的同样条件下，φ 在$[\alpha,\beta]$上可积，而且

$$\int_\alpha^\beta \varphi(u)\mathrm{d}u = \int_a^{+\infty}\left(\int_\alpha^\beta f(x,u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}x.$$

也就是说，对 x 与 u 的积分次序可以交换：

$$\int_\alpha^\beta\left(\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}u = \int_a^{+\infty}\left(\int_\alpha^\beta f(x,u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}x.$$

证明 根据定理 20.12，φ 在$[\alpha,\beta]$上连续，当然在$[\alpha,\beta]$上可积．因为 $\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$ 在$[\alpha,\beta]$上一致收敛,故对任意 $\varepsilon>0$,存在 $A_0>a$,使得当 $A>A_0$ 时,有

$$\left|\int_A^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon \tag{2}$$

对任意$u\in[\alpha,\beta]$成立．取定 $A>A_0$，由定理 20.2 知道，

$$\int_\alpha^\beta\left(\int_a^A f(x,u)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}u = \int_a^A\left(\int_\alpha^\beta f(x,u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}x .$$

于是

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta \varphi(u)\mathrm{d}u &= \int_\alpha^\beta\left(\int_a^A f(x,u)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}u + \int_\alpha^\beta\left(\int_A^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}u \\ &= \int_a^A\left(\int_\alpha^\beta f(x,u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}x + \int_\alpha^\beta\left(\int_A^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

应用不等式(2)即得

$$\begin{aligned}\left|\int_\alpha^\beta \varphi(u)\mathrm{d}u - \int_a^A\left(\int_\alpha^\beta f(x,u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}x\right| &\leqslant \int_\alpha^\beta\left|\int_A^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x\right|\mathrm{d}u \\ &< \varepsilon(\beta-\alpha).\end{aligned}$$

这就证明了

$$\int_\alpha^\beta \varphi(u)\mathrm{d}u = \int_a^{+\infty}\left(\int_\alpha^\beta f(x,u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}x. \quad \square$$

例 2 设 $a>0$，$b>0$，c 是任意实数，计算积分$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\cos cx\mathrm{d}x$.

解 因为$\frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}=\int_a^b \mathrm{e}^{-ux}\mathrm{d}u$,所以

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\cos cx\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\int_a^b(\mathrm{e}^{-ux}\cos cx\mathrm{d}u)\mathrm{d}x$$

$$= \int_a^b \left(\int_0^{+\infty} e^{-ux} \cos cx \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}u$$

$$= \int_a^b \frac{u}{u^2 + c^2} \mathrm{d}u = \frac{1}{2} \log \frac{b^2 + c^2}{a^2 + c^2}.$$

上面两个积分所以能交换，是因为积分

$$\int_0^{+\infty} e^{-ux} \cos cx \mathrm{d}x$$

关于 $u \in [a, b]$ 一致收敛． □

定理 20.14 断言，在所设条件下，对 x 和 u 进行积分的次序可以交换，但这里关于 u 的积分区间 $[\alpha, \beta]$ 是有限的．在很多情况下，往往需要知道两个无穷区间的积分是否可以交换．对此，我们有下面的

定理 20.15 如果 f 满足下列条件：

1° f 在 $[a, +\infty) \times [\alpha, +\infty)$ 上连续；

2° 积分

$$\int_a^{+\infty} f(x, u) \mathrm{d}x, \quad \int_\alpha^{+\infty} f(x, u) \mathrm{d}u$$

分别关于 u 在任何区间 $[\alpha, \beta]$ 上、关于 x 在任何区间 $[a, b]$ 上一致收敛；

3° 积分

$$\int_a^{+\infty} \left(\int_\alpha^{+\infty} |f(x, u)| \mathrm{d}u \right) \mathrm{d}x, \quad \int_\alpha^{+\infty} \left(\int_a^{+\infty} |f(x, u)| \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}u$$

中至少有一个存在，那么积分

$$\int_a^{+\infty} \left(\int_\alpha^{+\infty} f(x, u) \mathrm{d}u \right) \mathrm{d}x, \int_\alpha^{+\infty} \left(\int_a^{+\infty} f(x, u) \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}u$$

都存在，而且相等，即

$$\int_a^{+\infty} \left(\int_\alpha^{+\infty} f(x, u) \mathrm{d}u \right) \mathrm{d}x = \int_\alpha^{+\infty} \left(\int_a^{+\infty} f(x, u) \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}u. \tag{3}$$

证明 为确定起见，不妨假定

$$\int_a^{+\infty} \left(\int_\alpha^{+\infty} |f(x, u)| \mathrm{d}u \right) \mathrm{d}x \tag{4}$$

存在，因而(3)的左端存在．要证明的便是

$$\lim_{\beta \to +\infty} \int_\alpha^\beta \left(\int_a^{+\infty} f(x, u) \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}u = \int_a^{+\infty} \left(\int_\alpha^{+\infty} f(x, u) \mathrm{d}u \right) \mathrm{d}x.$$

由于 $\int_a^{+\infty} f(x, u) \mathrm{d}x$ 关于 u 在 $[\alpha, \beta]$ 上一致收敛，由定理 20.14 知道，

$$\int_\alpha^\beta \left(\int_a^{+\infty} f(x, u) \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}u = \int_a^{+\infty} \left(\int_\alpha^\beta f(x, u) \mathrm{d}u \right) \mathrm{d}x.$$

于是只需证明

$$\lim_{\beta\to+\infty}\int_a^{+\infty}\left(\int_\alpha^\beta f(x,u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty}\left(\int_\alpha^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}x,$$

也就是

$$\lim_{\beta\to+\infty}\int_a^{+\infty}\left(\int_\beta^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}x=0. \tag{5}$$

由假定，积分(4)存在，故对任意 $\varepsilon>0$，存在 $b_0>a$，使得

$$\int_{b_0}^{+\infty}\left(\int_\alpha^{+\infty}|f(x,u)|\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{6}$$

把(5)左端的积分拆成两部分：

$$\begin{aligned}&\int_a^{+\infty}\left(\int_\beta^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}x\\&=\int_a^{b_0}\left(\int_\beta^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}x+\int_{b_0}^{+\infty}\left(\int_\beta^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}x\\&=I_1+I_2.\end{aligned} \tag{7}$$

由不等式(6)可得

$$\begin{aligned}|I_2|&=\left|\int_{b_0}^{+\infty}\left(\int_\beta^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_{b_0}^{+\infty}\left(\int_\beta^{+\infty}|f(x,u)|\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}x\\&\leqslant\int_{b_0}^{+\infty}\left(\int_\alpha^{+\infty}|f(x,u)|\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned} \tag{8}$$

由于 $\int_\alpha^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}u$ 关于 x 在 $[a,b_0]$ 上一致收敛，故必存在 β_0，当 $\beta>\beta_0$ 时，不等式

$$\left|\int_\beta^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}u\right|<\frac{\varepsilon}{2(b_0-a)}$$

对 $[a,b_0]$ 中所有的 x 成立. 由此得

$$\begin{aligned}|I_1|&=\left|\int_a^{b_0}\left(\int_\beta^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}x\right|\\&\leqslant\int_a^{b_0}\left|\int_\beta^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}u\right|\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{2}\end{aligned} \tag{9}$$

当 $\beta>\beta_0$ 时成立. 利用(7)，(8)，(9) 即知当 $\beta>\beta_0$ 时有

$$\left|\int_a^{+\infty}\left(\int_\beta^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}x\right|\leqslant|I_1|+|I_2|<\varepsilon.$$

这就证明了等式(5). □

在 $f\geqslant0$ 的情况下，利用关于反常积分的 Dini 定理(定理 20.13)，从定理 20.15 可得

定理 20.16　如果 f 满足下列条件：

1° f 在 $[a,+\infty)\times[\alpha,+\infty)$ 上连续且非负；

2° 函数

$$\varphi(u)=\int_a^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}x,\psi(x)=\int_\alpha^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}u$$

分别在$[\alpha,+\infty)$和$[a,+\infty)$上连续；

3° 积分

$$\int_\alpha^{+\infty}\varphi(u)\mathrm{d}u,\quad\int_a^{+\infty}\psi(x)\mathrm{d}x$$

中至少有一个收敛，

那么3°中另一个积分也收敛，而且二者相等，即等式(3)成立．□

例 3 计算积分$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$.

解 记$I=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$,作变换 $x=ut,u>0$,得

$$I=\int_0^{+\infty}u\mathrm{e}^{-u^2t^2}\mathrm{d}t.$$

如果记

$$\varphi(u)=\int_0^{+\infty}u\mathrm{e}^{-u^2t^2}\mathrm{d}t,$$

那么$\varphi(u)=I$是个取常数值的函数．现在

$$\begin{aligned}I^2&=I\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u=\int_0^{+\infty}I\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u\\&=\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}u\mathrm{e}^{-u^2t^2}\mathrm{d}t\right)\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u\\&=\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}u\mathrm{e}^{-u^2(1+t^2)}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u,\end{aligned}$$

如果这两个无穷积分能交换次序，那么

$$\begin{aligned}I^2&=\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}u\mathrm{e}^{-u^2(1+t^2)}\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=\frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

所以

$$I=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

现在来证明交换次序的合理性．因为$f(t,u)=u\mathrm{e}^{-u^2(1+t^2)}$在$[0,+\infty)\times[0,+\infty)$上是连续且非负的，

$$\varphi(u)=\int_0^{+\infty}u\mathrm{e}^{-u^2(1+t^2)}\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{-u^2}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2t^2}\mathrm{d}(ut)=I\mathrm{e}^{-u^2}$$

是$[0,+\infty)$上的连续函数，

$$\psi(t)=\int_0^{+\infty}u\mathrm{e}^{-u^2(1+t^2)}\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\frac{1}{1+t^2}$$

也是$[0,+\infty)$上的连续函数．而且

$$I^2=\int_0^{+\infty}\varphi(u)\mathrm{d}u$$

收敛．故由定理 20.16，上述两个无穷限积分交换次序是允许的．　□

例 4　计算 Fresnel 积分 $\int_0^{+\infty}\sin x^2\mathrm{d}x$．

解　命 $x^2=t$，那么

$$\int_0^{+\infty}\sin x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t,\tag{10}$$

对刚才算出来的结果

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

作变换 $x=\sqrt{t}u$，可得

$$\frac{1}{\sqrt{t}}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-tu^2}\mathrm{d}u.\tag{11}$$

把它代入(10)，并交换积分的次序，便有

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\sin x^2\mathrm{d}x&=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-tu^2}\sin t\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-tu^2}\sin t\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u\\&=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{1+u^4}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.\end{aligned}$$

积分值虽然算出来了，但要证明交换积分次序的合法性却并不容易．为了克服这一困难，在(10)中引入收敛因子$\mathrm{e}^{-\alpha t}(\alpha>0)$．考虑积分

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha t}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t.$$

把(11)代入，并交换积分次序，得

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha t}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t&=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t(u^2+\alpha)}\sin t\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t\\&=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t(u^2+\alpha)}\sin t\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u\\&=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{1+(\alpha+u^2)^2},\quad\alpha>0.\end{aligned}\tag{12}$$

由 § 20.2 的例 2 和例 3 知道，积分 $\int_0^{+\infty} e^{-t(\alpha+u^2)}\sin t\mathrm{d}t$ 关于 u 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛；积分 $\int_0^{+\infty} e^{-t(\alpha+u^2)}\sin t\mathrm{d}u$ 关于 t 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛，而且积分

$$\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} e^{-t(\alpha+u^2)}\mid\sin t\mid\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u$$

存在，故由定理 20.15 知道，交换积分次序是允许的．又因为积分

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t,\qquad \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{1+(\alpha+u^2)^2}$$

都关于 α 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛，故能在积分号下取极限 $\alpha\to 0$．在(12)两端命 $\alpha\to 0$，即得

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{1+u^4}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

这里我们已经利用了 § 20.2 例 8 的结果．所以

$$\int_0^{+\infty}\sin x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.\quad\square$$

最后来研究函数 φ 的求导问题．

定理 20.17 如果函数 f 和 $\frac{\partial f}{\partial u}$ 都在 $[a,+\infty)\times[\alpha,\beta]$ 上连续，积分 $\int_a^{+\infty}\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛，那么 $\varphi(u)=\int_a^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上可微，而且

$$\varphi'(u)=\int_a^{+\infty}\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\mathrm{d}x,\alpha\leqslant u\leqslant\beta.\tag{13}$$

证明 对于任意正整数 $n>a$，命

$$\varphi_n(u)=\int_a^n f(x,u)\mathrm{d}x.$$

由定理 20.3 知道，φ_n 在 $[\alpha,\beta]$ 上有连续的导函数

$$\varphi_n'(u)=\int_a^n\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\mathrm{d}x.$$

由于 $\int_a^{+\infty}\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛，所以函数列 $\{\varphi_n'(u)\}$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛，且因 $\{\varphi_n\}$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上收敛于 φ，故由定理 10.10，φ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续可微，且(13)成立．$\square$

例 5 利用对参数的微分法，计算积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax^2}-e^{-bx^2}}{x^2}\mathrm{d}x,\quad a>0,b>0.$$

解　把 a 看作参数，记上面的积分为 $I(a)$，那么

$$I'(a) = -\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}dx. \tag{14}$$

为了说明微分运算和积分运算的交换是允许的，我们把 a 限制在区间 $[\delta, +\infty)$ 中，这里 δ 是任意一个正数．于是

$$e^{-ax^2} \leqslant e^{-\delta x^2}.$$

由于 $\int_0^{+\infty} e^{-\delta x^2}dx$ 收敛，故由 Weierstrass 判别法知道，积分 $\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}dx$ 对 $a \in [\delta, +\infty)$ 中一致收敛，故由定理20.17，上面的运算是允许的．由于 $\delta > 0$ 是任意的，故(14)在 $(0, +\infty)$ 中成立．由例3得

$$I'(a) = \frac{-\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}}.$$

所以 $I(a) = -\sqrt{\pi a} + c$．由于 $I(b) = 0, c = \sqrt{\pi b}$，故最后得

$$I(a) = \sqrt{\pi}(\sqrt{b} - \sqrt{a}).\quad \square$$

例6　计算积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx$.

解　用 Dirichlet 判别法容易断定这个积分是收敛的．为了计算它的值，和例4一样，我们引进收敛因子 $e^{-\alpha x}$，考虑含参变量 α 的积分

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}dx.$$

§20.2的例4已经证明这个积分在 $[0, +\infty)$ 上一致收敛，而被积函数在 $[0, +\infty) \times [0, +\infty)$ 上连续．由定理20.12知道，$I(\alpha)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续，因而

$$\lim_{\alpha \to 0} I(\alpha) = I(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx.$$

这样，问题就化成计算极限 $\lim\limits_{\alpha \to 0} I(\alpha)$．为此先算出 $I(\alpha)$．若记

$$f(x, \alpha) = e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x},$$

那么

$$\frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} = -e^{-\alpha x}\sin x.$$

由于当 $\alpha \geqslant \delta > 0$ 时，

$$|e^{-\alpha x}\sin x| \leqslant e^{-\delta x}.$$

由 weierstrass 判别法知道，积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha}dx = -\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\sin x\,dx$$

关于α在$[\delta,+\infty)$上一致收敛. 于是由定理 20.17 得

$$I'(\alpha)=-\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x}\sin x\mathrm{d}x,0<\alpha<+\infty.$$

直接计算上式右端的积分即得

$$I'(\alpha)=\frac{-1}{1+\alpha^2},\quad 0<\alpha<+\infty.$$

因而

$$I(\alpha)=-\arctan\alpha+c. \tag{15}$$

由于

$$|I(\alpha)|=\left|\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x}\mathrm{d}x=\frac{1}{\alpha},$$

所以$\lim\limits_{\alpha\to+\infty}I(\alpha)=0$. 在(15)中让$\alpha\to+\infty$即得$c=\frac{\pi}{2}$. 于是

$$I(\alpha)=\frac{\pi}{2}-\arctan\alpha.$$

让$\alpha\to0$，我们再一次得到

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}.$$

在 § 12.5 中，我们曾经利用 Fourier 积分公式得到过这一结果. □

利用这个结果，只要对积分$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\beta x}{x}\mathrm{d}x$作变换$x=\frac{t}{|\beta|}$ $(\beta\neq0)$，立刻可得

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\beta x}{x}\mathrm{d}x=\begin{cases}\frac{\pi}{2}, & \beta>0,\\ 0, & \beta=0,\\ -\frac{\pi}{2}, & \beta<0.\end{cases}$$

例 7 计算积分$\int_0^{+\infty}e^{-ax^2}\cos bx\mathrm{d}x,a>0$.

解 把b看作参数，记上面的积分为$I(b)$. 先证明

$$I'(b)=-\int_0^{+\infty}xe^{-ax^2}\sin bx\mathrm{d}x \tag{16}$$

对任意$b\in(-\infty,+\infty)$成立. 事实上，由于

$$|xe^{-ax^2}\sin bx|\leqslant xe^{-ax^2},$$

而$\int_0^{+\infty}xe^{-ax^2}\mathrm{d}x$收敛，故由 Weierstrass 判别法，(16) 右端的积分对$b\in(-\infty,+\infty)$一致收敛，因而(16) 成立. 用分部积分法容易算出

$$I'(b)=-\frac{b}{2a}I(b).$$

由此得

$$\log I(b)=-\frac{b^2}{4a}+c\ ,$$

或者

$$I(b)=c'\mathrm{e}^{-\frac{b^2}{4a}}.$$

已知 $I(0)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$,所以

$$I(b)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\mathrm{e}^{-\frac{b^2}{4a}}.\quad\square$$

上面这些结果(定理 20.12—定理 20.17)都是对无穷积分来讨论的，对瑕积分这些结果也都成立，这里就不再叙述了.

练习题 20.3

1. 研究下列函数在指定区间上的连续性：

(1) $f(x)=\int_0^{+\infty}\frac{t}{2+t^x}\mathrm{d}t,\quad x\in(2,+\infty)$;

(2) $\varphi(\alpha)=\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x^{\alpha}(\pi-x)^{\alpha}}\mathrm{d}x,\quad \alpha\in(0,2)$;

(3) $f(\alpha)=\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^{\alpha}}\mathrm{d}x,\quad \alpha\in(0,+\infty)$.

2. 利用公式 $\int_0^1 x^{\alpha-1}\mathrm{d}x=\frac{1}{\alpha},\quad \alpha>0$，计算积分

$$\int_0^1 x^{\alpha-1}(\log x)^m\mathrm{d}x,$$

其中 m 为正整数.

3. 计算积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\sin cx\mathrm{d}x, a>0, b>0, c>0$.

4. 计算积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\log(\alpha^2+x^2)}{\beta^2+x^2}\mathrm{d}x,\quad \beta\neq 0$.

5. 利用已知的积分值计算下列积分：

(1) $\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(2x^2+x+2)}\mathrm{d}x$;

(2) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x^2}{x}\mathrm{d}x$;

(3) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x\cos\beta x}{x}\mathrm{d}x$;

(4) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^3 x}{x}\mathrm{d}x$.

6. 如果 $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛,证明函数

$$\varphi(u)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\cos ux\mathrm{d}x$$

在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续.

问题　20.3

1. 证明函数

$$f(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{|\sin t|^{\alpha}}\mathrm{d}t$$

在 $[0,1)$ 中连续.

2. 通过积分

$$\varphi(u)=\int_0^{+\infty}u\mathrm{e}^{-ux}\mathrm{d}x,0<u\leqslant 1,$$

和

$$\psi(u)=\int_0^{+\infty}u\mathrm{e}^{u(u-x)}\mathrm{d}x,1\leqslant u<+\infty,$$

说明含参变量反常积分的 Dini 定理(定理 20.13)在开区间或无穷区间上不成立.

3. 计算积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\arctan\alpha x\arctan\beta x}{x^2}\mathrm{d}x$.

4. 计算积分 $\frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\left(\iint_D\frac{\sin(t\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}t$,这里

$$D=\{(x,y):1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\}.$$

5. 利用已知积分计算下列积分:

(1) $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)}\mathrm{d}x,a>0;$

(2) $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-ax^2}-\cos bx}{x^2}\mathrm{d}x,a>0;$

(3) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^4 x}{x^2}\mathrm{d}x;$

(4) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^4\alpha x-\sin^4\beta x}{x}\mathrm{d}x,\alpha>0,\beta>0.$

6. 在定理 20.17 中,如果把条件 $\int_a^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上收敛,减弱为

$\int_a^{+\infty} f(x,u)\,dx$ 在$[\alpha,\beta]$上某一点收敛，其他条件不变. 证明：积分$\int_a^{+\infty} f(x,u)\,dx$ 在$[\alpha,\beta]$上一致收敛于 $\varphi(u)$，且

$$\varphi'(u)=\int_a^{+\infty}\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}dx.$$

§20.4 Γ函数和B函数

含参变量的广义积分

$$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}t^{s-1}e^{-t}dt,$$

$$B(p,q)=\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt$$

分别称为Γ函数和B函数，前者是含一个参变量 s 的函数，后者是含两个参变量 p，q 的函数，它们都是由含参变量的反常积分所确定的非初等函数. 这一节将专门讨论这两个函数的性质以及它们之间的联系.

§11.3 的例 4 确定了 $\Gamma(s)$的定义域是 $s>0$，例 3 确定了 $B(p,q)$的定义域是 $p>0$，$q>0$.

定理 20.18 $\Gamma(s)$在$(0,+\infty)$上连续，且有各阶连续导数.

证明 把 $\Gamma(s)$分成两部分：

$$\Gamma(s)=\int_0^1 t^{s-1}e^{-t}dt+\int_1^{+\infty}t^{s-1}e^{-t}dt.$$

对于任意 $\beta>\alpha>0$，让 $s\in[\alpha,\beta]$，则当 $0<t<1$ 时，

$$0<t^{s-1}e^{-t}\leqslant t^{\alpha-1}e^{-t}.$$

因为 $\int_0^1 t^{\alpha-1}e^{-t}dt$ 收敛，所以$\int_0^1 t^{s-1}e^{-t}dt$ 关于 s 在$[\alpha,\beta]$上一致收敛，因而$\int_0^1 t^{s-1}e^{-t}dt$ 是$[\alpha,\beta]$上的连续函数. 当 $t>1$ 时，

$$t^{s-1}e^{-t}\leqslant t^{\beta-1}e^{-t}.$$

因为$\int_1^{+\infty}t^{\beta-1}e^{-t}dt$ 收敛，所以积分$\int_1^{+\infty}t^{s-1}e^{-t}dt$ 关于 s 在$[\alpha,\beta]$上一致收敛，因而$\int_1^{+\infty}t^{s-1}e^{-t}dt$ 是$[\alpha,\beta]$上的连续函数. 由 $\beta>\alpha>0$ 的任意性，即知 $\Gamma(s)$ 在$(0,+\infty)$上连续. 用同样的方法知道积分

$$\int_0^{+\infty}t^{s-1}e^{-t}\log t\,dt$$

也在$[\alpha,\beta]$上一致收敛，根据定理 20.17，

$$\Gamma'(s)=\int_0^{+\infty}t^{s-1}\mathrm{e}^{-t}\log t\,\mathrm{d}t$$

存在且连续．重复上面的做法，即知$\Gamma(s)$在$(0,+\infty)$上有任意阶导数． □

定理 20.19 Γ 函数具有下面三条性质：

1° 对任意 $s>0$，$\Gamma(s)>0$，且 $\Gamma(1)=1$；

2° $\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$对任意 $s>0$ 成立；

3° $\log\Gamma(s)$是$(0,+\infty)$上的凸函数．

证明 1° 从 Γ 函数的定义即知 $\Gamma(s)>0$ 且 $\Gamma(1)=1$；

2° 由分部积分法得

$$\Gamma(s+1)=\int_0^{+\infty}t^s\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=-t^s\mathrm{e}^{-t}\Big|_0^{+\infty}+s\int_0^{+\infty}t^{s-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$$
$$=s\Gamma(s);$$

3° 只要证明对 $p\in(1,+\infty)$，$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$，$s_1$，$s_2\in(0,+\infty)$有不等式

$$\log\Gamma\left(\frac{s_1}{p}+\frac{s_2}{q}\right)\leqslant\frac{1}{p}\log\Gamma(s_1)+\frac{1}{q}\log\Gamma(s_2),$$

或者

$$\Gamma\left(\frac{s_1}{p}+\frac{s_2}{q}\right)\leqslant\Gamma^{\frac{1}{p}}(s_1)\Gamma^{\frac{1}{q}}(s_2).$$

事实上，由 Hölder 不等式即得

$$\Gamma\left(\frac{s_1}{p}+\frac{s_2}{q}\right)=\int_0^{+\infty}t^{\frac{s_1}{p}+\frac{s_2}{q}-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$$
$$=\int_0^{+\infty}\left(t^{\frac{s_1-1}{p}}\mathrm{e}^{-\frac{t}{p}}\right)\left(t^{\frac{s_2-1}{q}}\mathrm{e}^{-\frac{t}{q}}\right)\mathrm{d}t$$
$$\leqslant\left(\int_0^{+\infty}t^{s_1-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^{+\infty}t^{s_2-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$=\Gamma^{\frac{1}{p}}(s_1)\Gamma^{\frac{1}{q}}(s_2).$$

这里我们使用了无穷积分的 Hölder 不等式，这从通常的 Hölder 不等式取极限就能得到． □

在性质 2°中取 $s=n$，n 是任意正整数，那么

$$\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)=n(n-1)\Gamma(n-1)=\cdots$$
$$=n(n-1)\cdots1\Gamma(1)=n!,$$

所以 Γ 函数可以看作是阶乘函数的推广．

现设 $n<s\leqslant n+1$，反复运用性质 2°，就得

$$\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)=\cdots=s(s-1)\cdots(s-n)\Gamma(s-n),$$

这里 $0<s-n\leqslant 1$．由此可见，只要知道 Γ 在 $(0,1)$ 中的值，Γ 在其他正数 s 处的值都能由上式给出．

出乎意料的是，定理 20.19 中 Γ 函数的三条性质完全确定了 Γ 函数．这就是说，任何定义在 $(0,+\infty)$ 上的函数，如果具有定理 20.19 中的三条性质，那么它一定是 Γ 函数．这个意想不到的结果是由 Bohr 和 Mollerup 首先发现的．

定理 20.20　如果 $(0,+\infty)$ 上的函数 f 满足下面三个条件：

1°　对任意 $x>0$，$f(x)>0$ 且 $f(1)=1$；

2°　$f(x+1)=xf(x)$ 对任意 $x>0$ 成立；

3°　$\log f$ 是 $(0,+\infty)$ 上的凸函数，

那么 $f(x)=\Gamma(x)$ 对任何 $x>0$ 成立．

证明　我们只要证明 f 被 1°，2°，3°三个条件所唯一确定就行了．因为 Γ 也满足 1°，2°，3°三个条件，所以必有 $f=\Gamma$．

由条件 2°，我们只需对 $(0,1)$ 中的 x 来讨论就够了．设 $x\in(0,1)$，因为 $\log f$ 是 $(0,+\infty)$ 上的凸函数，由关于凸函数性质的定理 3.19 得

$$\begin{aligned}\frac{\log f(n)-\log f(n-1)}{n-(n-1)}&\leqslant\frac{\log f(n+x)-\log f(n)}{(n+x)-n}\\&\leqslant\frac{\log f(n+1)-\log f(n)}{(n+1)-n},\end{aligned}$$

这里 n 是大于 1 的正整数．由 1°和 2°知道，$f(n)=(n-1)!$，所以上面的不等式可以写为

$$\begin{aligned}\log(n-1)!-\log(n-2)!&\leqslant\frac{\log f(n+x)-\log(n-1)!}{x}\\&\leqslant\log n!-\log(n-1)!,\end{aligned}$$

即

$$x\log(n-1)\leqslant\log f(n+x)-\log(n-1)!\leqslant x\log n.$$

对上面的不等式都加上 $\log(n-1)!$，得

$$\log(n-1)^x(n-1)!\leqslant\log f(n+x)\leqslant\log n^x(n-1)!.$$

即

$$(n-1)^x(n-1)!\leqslant f(n+x)\leqslant n^x(n-1)!.$$

由条件 2°，

$$f(n+x)=(n-1+x)\cdots(1+x)xf(x),$$

代入上式得

$$\frac{(n-1)^x(n-1)!}{x(x+1)\cdots(x+n-1)}\leqslant f(x)\leqslant\frac{n^x(n-1)!}{x(x+1)\cdots(x+n-1)}.\tag{1}$$

把(1)左端中的 $n-1$ 换成 n，不等式仍然成立，这样(1)可写成

$$\frac{n^xn!}{x(x+1)\cdots(x+n)}\leqslant f(x)\leqslant\frac{n^xn!}{x(x+1)\cdots(x+n)}\frac{x+n}{n},$$

在上式两端让 $n\to\infty$，即得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}=f(x).\tag{2}$$

这就证明了 $f(x)$ 被(2)左端的极限所唯一确定． □

从等式(2)顺便得到了 Γ 函数的另一个表达式

定理 20.21 对任意 $x>0$，有

$$\Gamma(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}.\tag{3}$$

证明 上面已经证明，当 $0<x<1$ 时，等式是成立的．今设 $1\leqslant x\leqslant 2$，$x=1$ 和 $x=2$ 时(3)显然成立．现就 $1<x<2$ 来证明(3)成立．写 $x=1+s$，则 $0<s<1$，于是

$$\Gamma(x)=\Gamma(1+s)=s\Gamma(s)=\lim_{n\to\infty}\frac{sn}{s+n+1}\cdot\frac{n^s n!}{s(s+1)\cdots(s+n)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{s+1}n!}{(s+1)\cdots(s+n)(s+n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

因而对 $1\leqslant x\leqslant 2$，(3)也成立．同理可证(3)对任意 $x>0$ 都成立． □

表面上似乎不相关联的 Γ 函数与 B 函数实际上有着密切的联系．

定理 20.22 对任意 $p>0$，$q>0$，有

$$\mathrm{B}(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

证明 固定 $q>0$，命

$$f(p)=\frac{\Gamma(p+q)\ \mathrm{B}(p,q)}{\Gamma(q)}.$$

如果能证明 f 具有定理 20.20 中的三条性质，那么由定理 20.20 即得 $f(p)=\Gamma(p)$，即定理 20.22 成立．

为此先证下面的 B 函数的递推公式：

$$\mathrm{B}(p+1,q)=\frac{p}{p+q}\mathrm{B}(p,q).\tag{4}$$

事实上，用一次分部积分就可得

$$\begin{aligned}\mathrm{B}(p+1,q)&=\int_0^1\left(\frac{t}{1-t}\right)^p(1-t)^{p+q-1}\mathrm{d}t\\&=\frac{p}{p+q}\int_0^1\left(\frac{t}{1-t}\right)^{p-1}(1-t)^{p+q}\frac{1}{(1-t)^2}\mathrm{d}t\\&=\frac{p}{p+q}\mathrm{B}(p,q).\end{aligned}$$

利用(4)和 Γ 函数的递推关系即得

$$f(p+1)=\frac{1}{\Gamma(q)}\Gamma(p+1+q)\mathrm{B}(p+1,q)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\Gamma(q)}(p+q)\Gamma(p+q)\frac{p}{p+q}\mathrm{B}(p,q) \\
&= pf(p).
\end{aligned}
$$

所以 f 具有定理 20.20 中的性质 2°. 注意到

$$
\mathrm{B}(1,q) = \int_0^1 (1-t)^{q-1}\mathrm{d}t = \frac{1}{q},
$$

可得

$$
f(1) = \frac{\Gamma(1+q)\mathrm{B}(1,q)}{\Gamma(q)} = \frac{\Gamma(q+1)}{q\Gamma(q)} = 1.
$$

另外显然有 $f(p)>0$，可见 f 也具有定理 20.20 中的性质 1°. 最后证明 $\log f$ 是 $(0,+\infty)$上的凸函数. 由于

$$
\log f(p) = \log\Gamma(p+q) + \log\mathrm{B}(p,q) - \log\Gamma(q),
$$

用与证明 $\log\Gamma$ 是$(0,+\infty)$上的凸函数的完全相同的方法，可以证明 $\log \mathrm{B}(p,q)$是关于变量 p 的在$(0,+\infty)$上的凸函数，因而 $\log f$ 也是$(0,+\infty)$上的凸函数. 这样，f 满足定理 20.20 的全部条件，所以 $f(p)=\Gamma(p)$，因而(3)成立. □

根据定理 20.22，不难从 Γ 函数的性质，直接推出 B 函数的一些性质.

定理 20.23 1° $\mathrm{B}(p,q)$在$(0,+\infty)\times(0,+\infty)$上连续且有各阶连续偏导数；

2° $\mathrm{B}(p,q)=\mathrm{B}(q,p)$，$p>0$，$q>0$；

3° $\mathrm{B}(p+1,q+1) = \dfrac{pq}{(p+q+1)(p+q)}\mathrm{B}(p,q)$， $p>0$，$q>0$.

证明是显然的. □

例 1 计算积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^\alpha x\sin^\beta x\mathrm{d}x, \alpha>-1, \beta>-1$.

解 命 $t=\sin^2 x$，即得

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^\alpha x\sin^\beta x\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{\beta-1}{2}}(1-t)^{\frac{\alpha-1}{2}}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{\beta+1}{2},\frac{\alpha+1}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)}. \quad \square
\end{aligned}
$$

如果在上式中取 $\alpha=\beta=0$,立刻得到

$$
\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \tag{5}
$$

如果在 $\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}t^{s-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ 中作变量代换 $t=x^2$,则有

$$\Gamma(s)=2\int_0^{+\infty}x^{2s-1}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x.$$

命 $s=\frac{1}{2}$,并利用(5)的结果,我们再一次得到

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

由于 $\alpha=m$, $\beta=n$ 为正整数时, $\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)$ 和 $\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)$ 的值容易算出，这时类似例 1 这种积分的值便可直接写出. 例如

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6 x\sin^4 x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma(6)}.$$

而

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}\sqrt{\pi},$$

$$\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)=\frac{5}{2}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{15}{8}\sqrt{\pi},$$

所以

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6 x\sin^4 x\mathrm{d}x=\frac{3\pi}{512}.$$

例 2 计算级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\binom{2n}{n}}$ 的和.

解 利用定理 20.22 可得

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\binom{2n}{n}}&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{n!n!}{(2n)!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)!n!}{(2n)!}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Gamma(n)\Gamma(n+1)}{\Gamma(2n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{B}(n,n+1)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 t^n(1-t)^{n-1}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

由于当 $0\leqslant t\leqslant 1$ 时，$0\leqslant t(1-t)\leqslant\frac{1}{4}$，所以

$$0\leqslant t^n(1-t)^{n-1}\leqslant\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}.$$

因而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}t^n(1-t)^{n-1}$ 在[0,1]上一致收敛,于是有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\binom{2n}{n}}=\int_0^1\sum_{n=1}^{\infty}t^n(1-t)^{n-1}\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^1 t \sum_{n=1}^{\infty} (t(1-t))^{n-1} \mathrm{d}t$$

$$= \int_0^1 \frac{t}{1-t(1-t)} \mathrm{d}t$$

$$= \int_0^1 \frac{t}{t^2-t+1} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}. \quad \square$$

Γ 函数还有两个重要的公式.

定理 20.24(加倍公式)　对任意的 $s>0$，有

$$\Gamma(2s) = \frac{2^{2s-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(s) \Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right). \tag{6}$$

证明　命 $p=2s$，上式可写成

$$\Gamma(p) = \frac{2^{p-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{p}{2}\right) \Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right). \tag{7}$$

要证明(7)成立，只要证明

$$f(p) = \frac{2^{p-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{p}{2}\right) \Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)$$

满足定理 20.20 的三条性质就行了. 显然

$$f(p+1) = \frac{2^p}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{p+2}{2}\right)$$

$$= \frac{p}{2} \frac{2^p}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{p}{2}\right) \Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right) = pf(p),$$

$$f(1) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 1.$$

又因为

$$\log f(p) = \log \frac{2^{p-1}}{\sqrt{\pi}} + \log \Gamma\left(\frac{p}{2}\right) + \log \Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right),$$

所以 $\log f$ 是$(0,+\infty)$上的凸函数. 由定理 20.20，即知(7)成立，因而(6)成立. $\square$

从定理 20.22 还可得下面的余元公式.

定理 20.25(余元公式)　对任意 $0<p<1$，有

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}. \tag{8}$$

证明　在定理 20.22 中命 $q=1-p$，那么

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \mathrm{B}(1-p,p) = \int_0^1 t^{-p}(1-t)^{p-1} \mathrm{d}t, \tag{9}$$

命 $t=\frac{1}{1+x}$，并利用 § 20.2 例 7 的结果得

$$\int_0^1 t^{-p}(1-t)^{p-1}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{\sin p\pi}.$$

代入(9)，即得(8). □

根据余元公式，只要知道 Γ 在$\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$中的值，便能算出 Γ 在(0,1)中的值，从而算出 Γ 在(0,+∞)中的值.

例 3 计算积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\tan x)^{\alpha}\mathrm{d}x,\ |\alpha|<1.$$

解 利用例 1 的结果即得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\tan x)^{\alpha}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{-\alpha}x\sin^{\alpha}x\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right).$$

利用余元公式即得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\tan x)^{\alpha}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\frac{\pi}{\sin\frac{1+\alpha}{2}\pi} = \frac{\pi}{2\cos\frac{\alpha\pi}{2}}.\quad \square$$

§ 7.9 定理 7.21 曾经给出 $n!$ 的一个渐近表达式：

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n,\quad n\to\infty. \tag{10}$$

这就是 Stirling 公式. 有了这个公式，处理与 $n!$ 有关的问题方便多了.

由于 $\Gamma(n+1)=n!$，自然想到，当 $x\to+\infty$ 时，$\Gamma(x+1)$有没有类似于(10)的渐近表达式？也即

$$\Gamma(x+1)\sim\sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{\mathrm{e}}\right)^x,\quad x\to+\infty \tag{11}$$

是否成立？下面将证明(11)是正确的. 事实上我们能得到比(11)更精细的结果.

定理 20.26 (Stirling) 对任意 $x>0$，存在 $\theta(x)\in(0,1)$，使得

$$\Gamma(x+1)=\sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{\mathrm{e}}\right)^x\mathrm{e}^{\frac{\theta(x)}{12x}}. \tag{12}$$

证明 因为 $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$，(12)等价于

$$\Gamma(x)=\frac{1}{x}\sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{\mathrm{e}}\right)^x\mathrm{e}^{\frac{\theta(x)}{12x}},$$

两边取对数得

$$\log\Gamma(x)=\log\sqrt{2\pi}+\left(x-\frac{1}{2}\right)\log x - x+\frac{\theta(x)}{12x}. \tag{13}$$

因此只要证明(13)就行.

下面通过四个引理来证明(13).

引理 20.1　对任意 $x>0$，有不等式

$$0<\left(x+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{x}\right)-1<\frac{1}{12}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right). \tag{14}$$

证明　利用 § 10.5 例 6 的展开式

$$\log\frac{1+x}{1-x}=2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{2k+1},\qquad -1<x<1$$

可得

$$\begin{aligned}\left(x+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{x}\right)&=\frac{2x+1}{2}\log\frac{1+\dfrac{1}{2x+1}}{1-\dfrac{1}{2x+1}}\\&=\frac{2x+1}{2}2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\left(\frac{1}{2x+1}\right)^{2k+1}\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\left(\frac{1}{2x+1}\right)^{2k}\\&=1+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2x+1}\right)^{2}+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2x+1}\right)^{4}+\cdots.\end{aligned}$$

由此即得

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{x}\right)-1=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2x+1}\right)^{2}+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2x+1}\right)^{4}+\cdots. \tag{15}$$

由于(15)的右端取正值，这就证明了(14)左边的不等式．另外显然可见(15)的右端小于

$$\begin{aligned}&\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+1}\right)^{2}\left\{1+\left(\frac{1}{2x+1}\right)^{2}+\left(\frac{1}{2x+1}\right)^{4}+\cdots\right\}\\&=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+1}\right)^{2}\frac{1}{1-\left(\dfrac{1}{2x+1}\right)^{2}}=\frac{1}{3}\frac{1}{4x^{2}+4x}=\frac{1}{12}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right).\end{aligned}$$

这就证明了(14)右边的不等式．　□

引理 20.2　对任意正整数 n，有

$$\int_0^n\frac{[t]-t+\dfrac{1}{2}}{t+x}\mathrm{d}t=\left(n+x+\frac{1}{2}\right)\log(n+x)-\left(\frac{1}{2}+x\right)\log x-\sum_{k=1}^{n}\log(k+x)-n.$$

证明　$$\begin{aligned}\int_0^n\frac{[t]-t+\dfrac{1}{2}}{t+x}\mathrm{d}t&=\sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1}\left(\frac{k+\dfrac{1}{2}+x}{t+x}-1\right)\mathrm{d}t\\&=\sum_{k=0}^{n-1}\left\{\left(k+\frac{1}{2}+x\right)(\log(k+1+x)-\log(k+x))-1\right\}\end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}\left(k+\frac{1}{2}+x\right)\log(k+1+x) - \sum_{k=0}^{n-1}\left(k+\frac{1}{2}+x\right)\log(k+x) - n$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(k-\frac{1}{2}+x\right)\log(k+x) - \sum_{k=0}^{n-1}\left(k+\frac{1}{2}+x\right)\log(k+x) - n$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(k+\frac{1}{2}+x\right)\log(k+x) - \sum_{k=1}^{n}\log(k+x)$$

$$- \sum_{k=0}^{n-1}\left(k+\frac{1}{2}+x\right)\log(k+x) - n$$

$$= \left(n+\frac{1}{2}+x\right)\log(n+x) - \left(\frac{1}{2}+x\right)\log x - \sum_{k=1}^{n}\log(k+x) - n. \quad \square$$

引理 20.3　对任意 $x>0$，有

$$0 < \int_0^{+\infty}\frac{[t]-t+\frac{1}{2}}{t+x}\mathrm{d}t < \frac{1}{12x}.$$

证明　因为

$$\int_0^{+\infty}\frac{[t]-t+\frac{1}{2}}{t+x}\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{\infty}\int_k^{k+1}\frac{k-t+\frac{1}{2}}{t+x}\mathrm{d}t$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\left\{\left(k+\frac{1}{2}+x\right)\log\left(1+\frac{1}{k+x}\right)-1\right\}.$$

在不等式(14)中，用 $k+x$ 代替 x，即得

$$0 < \int_0^{+\infty}\frac{[t]-t+\frac{1}{2}}{t+x}\mathrm{d}t < \frac{1}{12}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{k+x}-\frac{1}{k+x+1}\right)$$

$$= \frac{1}{12}\left\{\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)+\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)+\cdots\right\}$$

$$= \frac{1}{12x}. \quad \square$$

引理 20.4　$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\log n! + n - \left(n+\frac{1}{2}\right)\log n\right) = \log\sqrt{2\pi}$.　(16)

证明　在 Stirling 公式

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n\sqrt{2\pi n}} = 1$$

两边取对数即得(16).

现在来证明(13).

由等式

$$\log\frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} = \log n! + x\log n - \sum_{k=0}^{n}\log(k+x)$$

和引理 20.2 可得

$$\log\frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}-\int_0^n\frac{[t]-t+\frac{1}{2}}{t+x}\mathrm{d}t$$

$$=\log n!+x\log n-\log x-\left(n+x+\frac{1}{2}\right)\log(n+x)+\left(\frac{1}{2}+x\right)\log x+n$$

$$=\log n!+n+x\log n-\log x-\left(n+x+\frac{1}{2}\right)\left(\log n+\log\left(1+\frac{x}{n}\right)\right)+\left(\frac{1}{2}+x\right)\log x$$

$$=\log n!+n-\left(n+\frac{1}{2}\right)\log n-\left(n+x+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{x}{n}\right)+\left(x-\frac{1}{2}\right)\log x. \tag{17}$$

由引理 20.4 知道，(17)的前三项之和，当 $n\to\infty$ 时的极限为 $\sqrt{2\pi}$，而

$$\lim_{n\to\infty}\left(n+x+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{x}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\log\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n+x+\frac{1}{2}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\log\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\left(1+\frac{x}{n}\right)^{x+\frac{1}{2}}=x.$$

由定理 20.21 知道，(17)左端第一项当 $n\to\infty$ 时的极限是 $\log\Gamma(x)$. 在(17)两边让 $n\to\infty$，即得

$$\log\Gamma(x)-\int_0^{+\infty}\frac{[t]-t+\frac{1}{2}}{t+x}\mathrm{d}t=\log\sqrt{2\pi}-x+\left(x-\frac{1}{2}\right)\log x. \tag{18}$$

若记

$$\theta(x)=12x\int_0^{+\infty}\frac{[t]-t+\frac{1}{2}}{t+x}\mathrm{d}t,$$

则由引理 20.3 知道，$0<\theta(x)<1$，于是(18)可写成

$$\log\Gamma(x)=\log\sqrt{2\pi}-x+\left(x-\frac{1}{2}\right)\log x+\frac{\theta(x)}{12x}.$$

这正是要证明的(13). □

从定理 20.26 立刻可得

推论 对于任意实数 a，有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^a\Gamma(x)}{\Gamma(x+a)}=1.$$

证明留给读者作练习.

例 4 计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\int_0^1(1-x^2)^n\mathrm{d}x$.

解 令 $x^2=t$，则

$$\int_0^1(1-x^2)^n\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1 t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^n\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},n+1\right)$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(n+1)}{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}.$$

由定理 20.26 的推论，立刻可得

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\int_0^1(1-x^2)^n\,\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\,\Gamma(n+1)}{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.\quad\square$$

练习题 20.4

1. 证明 $\Gamma(s)$ 可表示为：

 (1) $\Gamma(s)=2\int_0^{+\infty}x^{2s-1}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x,s>0$;

 (2) $\Gamma(s)=a^s\int_0^{+\infty}x^{s-1}\mathrm{e}^{-ax}\mathrm{d}x,s>0,a>0$.

2. 证明 $\mathrm{B}(p,q)$ 可表示为：

 (1) $\mathrm{B}(p,q)=\int_0^{+\infty}\frac{t^{q-1}}{(1+t)^{p+q}}\mathrm{d}t,p>0,q>0$;

 (2) $\mathrm{B}(p,q)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2p-1}\theta\cos^{2q-1}\theta\,\mathrm{d}\theta,p>0,q>0$.

3. 利用 Γ 函数计算下列积分：

 (1) $\int_0^1\sqrt{x-x^2}\,\mathrm{d}x$;
 (2) $\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$;

 (3) $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^3}$;
 (4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5x\cos^6x\,\mathrm{d}x$.

4. 证明 $\log\mathrm{B}(p,q)$ 关于变量 p 是 $(0,+\infty)$ 上的凸函数.

5. 计算极限

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\int_0^1x^{\frac{3}{2}}(1-x^5)^n\,\mathrm{d}x.$$

问题 20.4

1. 讨论函数

$$f(s,p,q)=\int_0^{+\infty}\frac{x^s}{(a+bx^p)^q}\mathrm{d}x,a>0,b>0,p>0$$

的定义域.并用 Γ 函数表示 $f(s,p,q)$.

2. 证明

$$\int_0^1 \log\Gamma(x)\,\mathrm{d}x = \log\sqrt{2\pi}.$$

3. 证明

$$\int_0^1 \sin\pi x\log\Gamma(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left(\log\frac{\pi}{2}+1\right).$$

4. 证明

$$\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3-\cos x}} = \frac{1}{4\sqrt{\pi}}\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right).$$

5. 证明

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{m+k+1} = \frac{n!\,m!}{(n+m+1)!}.$$

6. 设 $f(x)=\left(\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t\right)^2, g(x)=\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\mathrm{d}t$,证明

$$f(x)+g(x)=\frac{\pi}{4},$$

并由此证明

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

7. 利用公式

$$\Gamma(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$$

证明对任意实数 x 有

$$\sin x = x\prod_{n=1}^\infty\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right).$$

8. 按照下列步骤，给出公式

$$\mathrm{B}(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

的另一个证明：

(1) $\Gamma(p)=2\int_0^{+\infty} u^{2p-1}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u$;

(2) $\Gamma(p)\Gamma(q) = \lim_{A\to\infty} 4\iint_{G(A)} f(u,v)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$,

其中,

$$f(u,v)=u^{2p-1}v^{2q-1}\mathrm{e}^{-(u^2+v^2)},$$
$$G(A)=\{(u,v):0\leqslant u\leqslant A,0\leqslant v\leqslant A\};$$

(3) 命 $D(R)=\left\{(r,\theta):\ 0\leqslant r\leqslant R,\ 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right\}$，那么

$$\lim_{A\to+\infty}\iint_{D(A)}f(u,v)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\frac{1}{4}\mathrm{B}(p,q)\Gamma(p+q),$$

$$\lim_{A\to+\infty}\iint_{D(\sqrt{2}A)}f(u,v)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\frac{1}{4}\mathrm{B}(p,q)\Gamma(p+q);$$

(4) $\mathrm{B}(p,q)=\dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$.

§ 20.5　n 维球的体积和面积

在 § 16.8 的例 2 中，我们给出了半径为 a 的 n 维球的体积：

$$\mu(B_n(a))=\begin{cases}\dfrac{\pi^k}{k!}a^{2k}, & n=2k,\\[2ex] \dfrac{2^k\pi^{k-1}}{(2k-1)!!}a^{2k-1}, & n=2k-1.\end{cases}$$

这里的公式是对 n 为偶数或奇数分别给出的，颇不方便．现在用 Γ 函数可以把二者统一起来．

当 $n=2k$ 时，可写

$$\mu(B_n(a))=\frac{\pi^k}{\Gamma(k+1)}a^{2k}=\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}a^n.$$

当 $n=2k-1$ 时，

$$\mu(B_n(a))=\frac{\pi^{k-1}a^{2k-1}}{\dfrac{(2k-1)(2k-3)\cdots3\cdot1}{2^k}}=\frac{\pi^{k-\frac{1}{2}}a^{2k-1}}{\left(k-\frac{1}{2}\right)\left(k-\frac{3}{2}\right)\cdots\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$=\frac{\pi^{k-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}a^{2k-1}=\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}a^n.$$

这样，不论 n 是偶数还是奇数，都有

$$\mu(B_n(a))=\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}a^n.$$

利用这儿的推导还可把 § 16.8 例 3 的积分写成统一的形式：

$$\int\cdots\int_{B_n(a)} f(r)\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n = \frac{n\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}\int_0^a t^{n-1}f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^a t^{n-1}f(t)\,\mathrm{d}t\,. \tag{1}$$

下面我们将用这个公式来计算 n 维球面的面积.

设 $\mathbf{R}^n$ 中曲面 S 有如下的参数表示:

$$\begin{cases} x_1 = x_1(u_1,\cdots,u_{n-1}), \\ x_2 = x_2(u_1,\cdots,u_{n-1}), \\ \cdots\cdots \\ x_n = x_n(u_1,\cdots,u_{n-1}), \end{cases} \quad (u_1,\cdots,u_{n-1}) \in D \subset \mathbf{R}^{n-1};$$

或用向量形式写成

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u_1,\cdots,u_{n-1}),\ (u_1,\cdots,u_{n-1}) \in D.$$

仿照定义 18.1, 定义 S 的面积为

$$\sigma(S) = \iint_D \|\boldsymbol{r}_{u_1}\times\boldsymbol{r}_{u_2}\times\cdots\times\boldsymbol{r}_{u_{n-1}}\|\,\mathrm{d}u_1\cdots\mathrm{d}u_{n-1},$$

这里

$$\boldsymbol{r}_{u_i} = \left(\frac{\partial x_1}{\partial u_i},\ \cdots,\ \frac{\partial x_n}{\partial u_i}\right),\ i=1,\ \cdots,\ n-1,$$

$$\boldsymbol{r}_{u_i}\times\cdots\times\boldsymbol{r}_{u_{n-1}} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \cdots & \boldsymbol{e}_n \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_2}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial u_1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_{n-1}} & \frac{\partial x_2}{\partial u_{n-1}} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial u_{n-1}} \end{vmatrix},$$

$\boldsymbol{e}_1$, $\cdots$, $\boldsymbol{e}_n$ 是 n 个单位坐标向量. 特别当曲面有显式表示

$$x_n = f(x_1,\cdots,x_{n-1}),\ (x_1,\cdots,x_{n-1}) \in D$$

时, 它的面积为:

$$\sigma(S) = \int\cdots\int_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2+\cdots+\left(\frac{\partial f}{\partial x_{n-1}}\right)^2}\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_{n-1}. \tag{2}$$

$\mathbf{R}^n$ 中以原点为中心, a 为半径的球面 $S_{n-1}(a)$ 的方程为:

$$x_1^2+\cdots+x_n^2 = a^2,$$

也可写成

$$x_n = \pm\sqrt{a^2-(x_1^2+\cdots+x_{n-1}^2)},\ x_1^2+\cdots+x_{n-1}^2 \leqslant a^2.$$

根据球的对称性和(2)，$S_{n-1}(a)$的面积为

$$\sigma(S_{n-1}(a)) = 2\underset{x_1^2+\cdots+x_{n-1}^2\leqslant a^2}{\int\cdots\int}\sqrt{1+\left(\frac{\partial x_n}{\partial x_1}\right)^2+\cdots+\left(\frac{\partial x_n}{\partial x_{n-1}}\right)^2}\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_{n-1}$$

$$= 2a\underset{B_{n-1}(a)}{\int\cdots\int}\frac{1}{\sqrt{a^2-r^2}}\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_{n-1},$$

这里 $r^2 = x_1^2+\cdots+x_{n-1}^2$. 由公式(1)，上面的积分为

$$\underset{B_{n-1}(a)}{\int\cdots\int}\frac{1}{\sqrt{a^2-r^2}}\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_{n-1} = \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\int_0^a\frac{t^{n-2}}{\sqrt{a^2-t^2}}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}a^{n-2}\int_0^1\frac{s^{n-2}}{\sqrt{1-s^2}}\mathrm{d}s$$

$$= \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}a^{n-2}\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

$$= \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}a^{n-2}.$$

由此得

$$\sigma(S_{n-1}(a)) = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}a^{n-1}.$$

附录　问题的解答与提示

第 11 章　反常积分

问题 11.2

1. 把被积函数写成

$$\frac{\sin x}{x^{\alpha}+\sin x}=\frac{\sin x}{x^{\alpha}}-\frac{\sin^2 x}{x^{\alpha}(x^{\alpha}+\sin x)}.$$

当 $\alpha>0$ 时，由 Dirichlet 判别法知道积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^{\alpha}}\mathrm{d}x$ 收敛，因此下面两个积分：

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^{\alpha}+\sin x}\mathrm{d}x,\ \int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^{\alpha}(x^{\alpha}+\sin x)}\mathrm{d}x$$

同敛散，这样问题就归结为上面第二个积分发散．由于

$$\frac{\sin^2 x}{x^{\alpha}(x^{\alpha}+\sin x)}\geqslant\frac{\sin^2 x}{x^{\alpha}(x^{\alpha}+1)},$$

只要证明上式右端的积分发散就行了．

在这个问题中，

$$\left|\int_1^A \sin x\mathrm{d}x\right|=|\cos A-\cos 1|\leqslant 2,$$

而且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{\alpha}+\sin x}=0$，但积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^{\alpha}+\sin x}\mathrm{d}x$ 却是发散的．问题就出在 $\frac{1}{x^{\alpha}+\sin x}$ 不是单调地趋于 0．这个例子说明，Dirichlet 判别法中，“$g(x)$单调趋于 0”中的单调是不能去掉的．

2. 从 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=a$ 知道，对任意 $\varepsilon>0$，存在 $A>0$，当 $x>A$ 时，$a-\varepsilon<f(x)<a+\varepsilon$．把积分拆为

$$t\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-tx}f(x)\mathrm{d}x=t\int_0^{A}\mathrm{e}^{-tx}f(x)\mathrm{d}x+t\int_A^{+\infty}\mathrm{e}^{-tx}f(x)\mathrm{d}x.$$

由此可以算出

$$\limsup_{t\to0^+} t\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-tx}f(x)\mathrm{d}x\leqslant a+\varepsilon,$$

$$\liminf_{t\to0^+} t\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-tx}f(x)\mathrm{d}x\geqslant a-\varepsilon.$$

由此便可得所要的结果．

3. 命 $x^2=t$ 得

$$\int_0^{+\infty}(-1)^{[x^2]}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}(-1)^{[t]}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}.$$

问题归结为证明对任意 $A>1$ 有

$$\left|\int_1^A(-1)^{[t]}\mathrm{d}t\right|\leqslant M,\tag{1}$$

这里 M 是一个常数. 对于固定的 A，总能找到自然数 n，使 $n\leqslant A<n+1$，把积分写成

$$\int_1^A(-1)^{[t]}\mathrm{d}t=\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}(-1)^{[t]}\mathrm{d}t+\int_n^A(-1)^{[t]}\mathrm{d}t$$

就能证得(1).

4. 要证明存在 $\xi\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=g(b)\int_\xi^b f(x)\mathrm{d}x.$$

命　$F(x)=\int_x^b f(t)\mathrm{d}t$，把积分写成

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=-\int_a^b g(x)\mathrm{d}F(x).$$

用分部积分公式.

5. 当 $n-m>1$ 时，积分绝对收敛；当 $0<n-m\leqslant 1$ 时，积分条件收敛.

6. 在所给的条件下，证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$存在，再用练习题 11.1 第 2 题的结果即得.

问题 11.3

1. 本题的困难在于如何处理 $\sin\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$. 把原积分写成

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^\alpha}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^\alpha}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^\alpha}\mathrm{d}x=I_1+I_2.$$

先证明当 $\alpha\leqslant 0$ 时，I_2 发散. 注意到，$\sin x$ 在$\left(2k\pi,\left(2k+\dfrac{1}{2}\right)\pi\right)$中取正值且递增，因而

$$\left|\int_{2k\pi}^{2k\pi+\frac{\pi}{2}-1}x^{-\alpha}\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x\right|=\int_{2k\pi}^{2k\pi+\frac{\pi}{2}-1}x^{-\alpha}\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$$

$$\geqslant(2k\pi)^{-\alpha}\int_{2k\pi}^{2k\pi+\frac{\pi}{2}-1}\sin x\mathrm{d}x=\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\right)(2k\pi)^{-\alpha}$$

$$=\begin{cases}1-\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-1\right), & \alpha=0,\\ \to+\infty\ (k\to\infty), & \alpha<0.\end{cases}$$

所以 I_2 发散. 而 $\alpha\leqslant 0$ 时，I_1 是一常义积分. 故当 $\alpha\leqslant 0$ 时，I 发散. 用同样的方法可以证明 $\alpha\geqslant 2$ 时，I 也发散. 现证当 $0<\alpha<2$ 时，I 收敛. 这里需要一些技巧. 把 I_2 写成

$$I_2=\int_1^{+\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^\alpha\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}\mathrm{d}x.$$

由于

$$\left|\int_1^A\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x\right|=\left|\int_1^A\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}\left(x+\frac{1}{x}\right)\right|$$

$$=\left|\cos 2-\cos\left(A+\frac{1}{A}\right)\right|\leqslant 2,$$

在 $0<\alpha<2$ 的条件下 $\frac{1}{x^{\alpha}-x^{\alpha-2}}$ 递减趋于 0（当 $x\to+\infty$ 时），故由 Dirichlet 判别法，I_2 收敛．同样道理，对 I_1 作变换 $x=\frac{1}{t}$ 知其也收敛．最后通过不等式

$$\frac{\left|\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)\right|}{x^{\alpha}}\geqslant\frac{\sin^2\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^{\alpha}}=\frac{1}{2x^{\alpha}}-\frac{1}{2x^{\alpha}}\cos 2\left(x+\frac{1}{x}\right)$$

知道当 $0<\alpha<2$ 时，积分 $\int_0^{+\infty}\left|\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^{\alpha}}\right|\mathrm{d}x$ 发散．总之积分 I 仅当 $0<\alpha<2$ 时条件收敛．

2．设 f 在 $(0,1)$ 中递增，由以下不等式：

$$\int_0^{1-\frac{1}{n}}f(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\leqslant\int_{\frac{1}{n}}^{1}f(x)\mathrm{d}x$$

即得证明．

3．直接验证之．

4．命 $f(x)=x^{\alpha-1}$．

5．因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=a$，故对任意 $\varepsilon>0$，存在 $A_1>0$，只要 $x>A_1$，便有 $|f(x)-a|<\varepsilon$．由于 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=b$，故对 $\varepsilon>0$，存在 $A_2>0$，只要 $x<-A_2$，便有 $|f(x)-b|<\varepsilon$．现取 $B>A_1$，$A<-A_2-\eta$，通过直接计算可得

$$\int_A^B\{f(x+\eta)-f(x)\}\mathrm{d}x=(a-b)\eta+\int_B^{B+\eta}(f(x)-a)\mathrm{d}x-\int_A^{A+\eta}(f(x)-b)\mathrm{d}x.$$

由此便得证明．

6．(1) 不妨设 $0<a<b$，对任意 $0<\delta<A$，根据积分平均值定理，

$$\begin{aligned}\int_\delta^A\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x&=\int_\delta^A\frac{f(ax)}{x}\mathrm{d}x-\int_\delta^A\frac{f(bx)}{x}\mathrm{d}x\\&=\int_{a\delta}^{aA}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t-\int_{b\delta}^{bA}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t\\&=\int_{a\delta}^{b\delta}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t-\int_{aA}^{bA}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t\\&=(f(\xi)-f(\eta))\log\frac{b}{a},\end{aligned}$$

其中 $\xi\in[a\delta,b\delta]$，$\eta\in[aA,bA]$，让 $\delta\to0$，$A\to+\infty$ 即得要证的等式．

(2)和(3)的证明是类似的．

7．显然．

第 12 章　Fourier 分析

问题 12.1

1．把 b_n 写成

$$b_n=\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)\frac{2\pi}{n}}^{\left(k-\frac{1}{2}\right)\frac{2\pi}{n}}\left(f(x)-f\left(x+\frac{\pi}{n}\right)\right)\sin nx\mathrm{d}x.$$

2. 用推广的第二积分中值定理.

3. 我们证明第一个等式. 选取充分大的自然数 k_0，使得 $[a,b]\subset[-2k_0\pi,2k_0\pi]$. 在 $[-2k_0\pi,2k_0\pi]$ 中定义

$$F(x)=\begin{cases}f(x), & x\in[a,b],\\ 0, & x\in[-2k_0\pi,2k_0\pi]\setminus[a,b].\end{cases}$$

这样

$$\int_{-2k_0\pi}^{2k_0\pi}F(x)|\sin nx|\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)|\sin nx|\mathrm{d}x, \tag{1}$$

用分点 $x_i=-2k_0\pi+\frac{2\pi}{n}i$，$i=0, 1, \cdots, 2nk_0$，把区间 $[-2k_0\pi,2k_0\pi]$ 分成 $2nk_0$ 等分. 于是

$$\int_{-2k_0\pi}^{2k_0\pi}F(x)|\sin nx|\mathrm{d}x=\sum_{i=0}^{2nk_0-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}F(x)|\sin nx|\mathrm{d}x. \tag{2}$$

由于 $|\sin nx|$ 非负，故由第一积分中值定理，存在 $\mu_i\in[m_i,M_i]$，使得

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}}F(x)|\sin nx|\mathrm{d}x=\mu_i\int_{x_i}^{x_{i+1}}|\sin nx|\mathrm{d}x, \tag{3}$$

这里 m_i 和 M_i 分别是 F 在 $[x_i,x_{i+1}]$ 上的下、上确界. 对(3)右端的积分作变换 $t=nx+2k_0n\pi-2\pi i$，那么

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}}|\sin nx|\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\int_0^{2\pi}|\sin t|\mathrm{d}t=\frac{4}{n}.$$

把它代入(3)，(2)可写为

$$\int_{-2k_0\pi}^{2k_0\pi}F(x)|\sin nx|\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\sum_{i=0}^{2nk_0-1}\mu_i\frac{2\pi}{n}.$$

于是

$$\frac{2}{\pi}\sum_{i=0}^{2nk_0-1}m_i\frac{2\pi}{n}\leqslant\int_{-2k_0\pi}^{2k_0\pi}F(x)|\sin nx|\mathrm{d}x\leqslant\frac{2}{\pi}\sum_{i=0}^{2nk_0-1}M_i\frac{2\pi}{n}.$$

由于 F 在 $[-2k_0\pi,2k_0\pi]$ 上 Riemann 可积，故当 $n\to\infty$ 时，上式左右两端都趋于 $\frac{2}{\pi}\int_{-2k_0\pi}^{2k_0\pi}F(x)\mathrm{d}x$。因而

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-2k_0\pi}^{2k_0\pi}F(x)|\sin nx|\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_{-2k_0\pi}^{2k_0\pi}F(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

再由(1)即得

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)|\sin nx|\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

仔细分析上面的证明，我们发现，除了用到三角函数是周期 2π 的性质外，并没用到三角函数的其它性质. 因此可把上面的命题推广为下面更一般的命题：

设 f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积，φ 是 $[a,b]$ 上非负的 Riemann 可积函数，且以 T 为周期，那么

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\varphi(nx)\mathrm{d}x=\frac{1}{T}\int_0^T\varphi(x)\mathrm{d}x\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

请读者给出这一般命题的证明.

4. 利用 f 的绝对可积性和上一题的结果.

5. 由于 $\int_{-a}^{a}=\int_{-a}^{0}+\int_{0}^{a}$,在 $\int_{-a}^{0}$ 中令 $x=-t$，便得

$$\int_{-a}^{a}\frac{1-\cos\lambda x}{x}f(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{a}\frac{1-\cos\lambda x}{x}(f(x)-f(-x))\mathrm{d}x$$
$$=\int_{0}^{a}\frac{f(x)-f(-x)}{x}\mathrm{d}x-\int_{0}^{a}\frac{f(x)-f(-x)}{x}\cos\lambda x\mathrm{d}x.$$

剩下的只需证明 $\frac{f(x)-f(-x)}{x}$ 在 $[0,a]$ 中可积.

问题 12.2

1. (1) 求 $\log\left(2\cos\frac{x}{2}\right)$ 在 $(-\pi,\pi)$ 中的 Fourier 展开式. 因为它是偶函数，$b_n=0$，$n=1,2,\cdots$.

从 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\sin t\mathrm{d}t=-\frac{\pi}{2}\log 2$ 可以算出 $\int_0^{\pi}\log\cos\frac{x}{2}\mathrm{d}x=-\pi\log 2$，所以 $a_0=0$.

$$a_n=\frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin nx\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\mathrm{d}x=(-1)^{n-1}\frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin nt\cos\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t=(-1)^{n-1}\frac{1}{n}.$$

由此即得(1)

(2) 在(1)中作变换 $x=t-\pi$ 即得(2).

2. 利用 $|\cos x|$ 的展开式可得

$$\int_a^b f(x)|\cos\lambda x|\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{4k^2-1}u_k(\lambda),$$

其中

$$u_k(\lambda)=\int_a^b f(x)\cos 2k\lambda x\mathrm{d}x.$$

再利用问题 10.3 第 1 题的结果和 Riemann-Lebesgue 引理即得.

第二个等式的证明是一样的.

3. (1) 对等式

$$\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kt=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}},\quad 0<t<2\pi$$

两端从 0 到 x 积分即得.

(2) 把等式

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{k}=-\frac{x}{2}+\int_0^x\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t \tag{4}$$

右端的积分写为

$$\int_0^x\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t=\int_0^x\left(\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}-\frac{1}{t}\right)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\mathrm{d}t+\int_0^x\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{t}\mathrm{d}t$$

$$= I_1 + I_2.$$

易知 $\lim\limits_{n\to\infty} I_1 = 0$. 对 I_2 作变量代换 $\left(n+\frac{1}{2}\right)t = u$，那么

$$I_2 = \int_0^{\left(n+\frac{1}{2}\right)x} \frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u.$$

在(4)的两端让 $n\to\infty$ 并利用已知的等式

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k} = \frac{\pi - x}{2},\quad 0 < x < 2\pi$$

即得要证的结果.

4. 把等式左端的积分写为

$$\int_0^h g(t)\frac{\sin \lambda t}{t}\mathrm{d}t = \int_0^h (g(t) - g(0+0))\frac{\sin \lambda t}{t}\mathrm{d}t + g(0+0)\int_0^h \frac{\sin \lambda t}{t}\mathrm{d}t.$$

已知

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^h \frac{\sin \lambda t}{t}\mathrm{d}t = \lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^{\lambda h} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2},$$

问题就归结为上式右端第一个积分当 $\lambda\to+\infty$ 时趋于0.

5.（1）在 $\cos ax$ 的展开式中让 $x=\pi$，得

$$\cot a\pi = \frac{1}{\pi a} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a}{a^2 - n^2},\quad a \neq 0,\ \pm 1,\ \cdots$$

再让 $a\pi = x$ 即得.

（2）命 $x=0$，用同样方法即得.

问题 12.3

1. 要证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = 0$.

$$\frac{a_n}{n} = \frac{S_n - S_{n-1}}{n} = \frac{S_n}{n} - \frac{n-1}{n}\frac{S_{n-1}}{n-1},$$

从 $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma$ 存在，可以证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = 0$.

2.（1）是 Abel 第二定理的直接推论.

（2）按定义即得.

3. 分下面三步来证：

（1）证明 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在$(-1,1)$中绝对收敛.

这是因为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ 可以在 Cesàro 意义下求和，由问题 1 的结论，$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = 0$，由此即得

$$|a_n x^n| \leqslant n|x|^n,\quad n > N.$$

（2）记 $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，则 f 可以写为

$$f(x) = (1-x)^2\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\sigma_{n+1} x^n,\quad x \in (-1,1).$$

这是因为从级数的乘法知道，

$$\frac{f(x)}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}(a_0+a_1+\cdots+a_n)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}S_nx^n,$$

$$\frac{f(x)}{(1-x)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(S_0+S_1+\cdots+S_n)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\sigma_{n+1}x^n$$

(3) 现在

$$f(x)-S=(1-x)^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(\sigma_{n+1}-S)x^n.$$

由此便可证明 $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=s$.

4. $\sum\limits_{m=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)=\frac{1}{4}(A)$从定义便可得到. 至于该级数不能 Cesàro 求和是因为它不满足问题 1 的可以 Cesàro 求和的必要条件.

综合第 3，4 两题的结果可以得到这样的结论：Abel 求和法比 Cesàro 求和法更优越.

5. 记 $S_n=\sum\limits_{k=2}^{n}(-1)^k\log k$，根据 Wallis 公式有

$$S_{2n}+S_{2n+1}=\log\frac{\pi}{2}+O\left(\frac{1}{n}\right).$$

于是

$$\sum_{n=2}^{N}S_n=\frac{N}{2}\log\frac{\pi}{2}+O(\log N).$$

由此即得所要的结果.

6. 由幂级数的乘法和 Abel 求和的定义即得.

7. 设 f 是$[a,b]$上的连续函数，命 $x=a+\frac{t}{\pi}(b-a)$，记

$$g(t)=f\left(a+\frac{t}{\pi}(b-a)\right),$$

那么 g 是$[0,\pi]$上的连续函数. 再对 g 作偶性延拓，g 就是$[-\pi,\pi]$上的连续函数，而且满足

$$g(-\pi)=g(\pi).$$

由定理 12.8，存在三角多项式 $T(t)$，使得

$$|g(t)-T(t)|<\frac{\varepsilon}{2},$$

这个 $T(t)$一定是余弦多项式，把它在 $t=0$ 处展开成幂级数，这个幂级数在$[-\pi,\pi]$上当然一致收敛于 $T(t)$，因而存在多项式 $p(t)$，使得

$$|T(t)-p(t)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

对任意 $t\in[-\pi,\pi]$成立. 由此即得

$$\left|f(x)-p\left(\frac{x-a}{b-a}\pi\right)\right|<\varepsilon.$$

问题 12.4

1. 通过直接计算即得

$$A_0=a_0^2,\ A_n=a_n^2+b_n^2,\ B_n=0.$$

由此得

$$F(x)\sim\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\cos nx.$$

上式右端的级数在$(-\infty,\infty)$上一致收敛，设其和为 $G(x)$，G 是$(-\infty,\infty)$上周期 2π 的连续函数，上面的级数当然是 G 的 Fourier 级数．由此得 $F(x)\equiv G(x)$，即

$$F(x)=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\cos nx$$

让 $x=0$ 即得 f 的 Parseval 等式．

2．由假定

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

$$f'(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}n(b_n\cos nx-a_n\sin nx).$$

由 Parseval 等式即得题中的不等式．等式成立当且仅当 $a_n=b_n=0$，$n\geqslant 2$．由此即得所要的结论．

3．由假定，f 关于点$\left(\frac{1}{2},0\right)$中心对称．我们在$\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$上把 f 作成奇函数，然后把它用周期 1 延拓．再命 $\varphi(x)=f\left(\frac{x}{2\pi}\right)$，$|x|\leqslant\pi$．于是

$$\varphi(-\pi)=\varphi(\pi)=0,\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}f\left(\frac{x}{2\pi}\right)\mathrm{d}x=0.$$

对 φ 用上题的结论．

4．参看问题 10.6 第 3 题的证明．

5．φ_n 可以具体表出如下：

$$\varphi_n(t)=\mathrm{sgn}\{\sin(2^n\pi t)\}=\begin{cases}1, & \frac{2k}{2^n}<t<\frac{2k+1}{2^n},\ k=0,\ 1,\ 2^{n-1}-1,\\ -1, & \frac{2k-1}{2^n}<t<\frac{2k}{2^n},\ k=1,\ \cdots,\ 2^{n-1},\\ 0, & t=\frac{k}{2^n},\ k=0,\ 1,\ \cdots,\ 2^n.\end{cases}$$

由此可见，除了有限个点外，$\varphi_n^2(t)=1$ 在$[0,1]$上成立，因而 $\int_0^1\varphi_n^2(t)\mathrm{d}t=1$．设 $m<n$，通过上面的表达式便可证明

$$\int_0^1\varphi_m(t)\varphi_n(t)\mathrm{d}t=0.$$

第 13 章 多变量函数的连续性

问题 13.3

1．任取 $\boldsymbol{x}\in\partial\bar{E}$，要证 $\boldsymbol{x}\in\partial E$，即要证存在 $\delta>0$，使得 $B(\boldsymbol{x},\delta)$中既有 E 中的点，也有 E^c 中的点．因为 $\boldsymbol{x}\in\partial\bar{E}$，故存在 $\delta>0$，使得 $B(\boldsymbol{x},\delta)$中既有 $\bar{E}$ 中的点，也有 $\bar{E}^c$ 中的点．设 $\boldsymbol{x}_1\in B(\boldsymbol{x},\delta)\cap\bar{E}$，$\boldsymbol{x}_2\in B(\boldsymbol{x},\delta)\setminus\bar{E}$ 若$\boldsymbol{x}_1\in E$,则说明 $B(\boldsymbol{x},\delta)$中有 E 的点，若 $\boldsymbol{x}_1\in\bar{E}\setminus E$，则 $\boldsymbol{x}_1$ 是 E 的凝聚点，因而存在 $\delta_1>0$，使得 $B(\boldsymbol{x}_1,\delta_1)\subset B(\boldsymbol{x},\delta)$，且 $B(\boldsymbol{x}_1,\delta_1)$

中有 E 的点,即 $B(x,\delta)$ 中有 E 的点. 由 $x_2\in B(x,\delta)\setminus\bar{E}$ 即知 x_2 为 E 的外点. 由此即得证明.

2. 任取 $x_0\in G$, 记 $F=[x_0,+\infty)\cap G^C$, 因为 G 是有界开集, 所以 F 是非空的闭集且有下界. 记 $\beta=\inf F$, 则 $\beta\geqslant x_0$, 由于 $\beta\in F$, 而 $x_0\notin F$, 所以 $\beta>x_0$. 容易证明 $[x_0,\beta)\subset G$, 于是对于每一点 $x_0\in G$, 存在着满足下面三个条件的 β:

(i) $\beta>x_0$, (ii) $\beta\notin G$, (iii) $[x_0,\beta)\subset G$.

用类似的方法可以证明还有如下的 α:

(i) $\alpha<x_0$, (ii) $\alpha\notin G$, (iii) $(\alpha,x_0]\subset G$.

这样, 对于每一个 $x_0\in G$, 存在区间 (α,β) 满足:

(i) $x_0\in(\alpha,\beta)$, (ii) $(\alpha,\beta)\subset G$, (iii) α, $\beta\notin G$.

这样的一个区间 (α,β) 称为 G 的构成区间, 现设 (α,β) 和 (γ,δ) 是 G 的任意两个构成区间, 容易证明, 它们或者不相交或者完全重合. 在每个构成区间中任取一有理数, 则全部构成区间和有理数集的一个子集对应, 因而至多是可数的. 于是得

$$G=\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k,\beta_k).$$

3. 记 $a=\inf F$, $b=\sup F$, 则 $F\subset[a,b]$, 记

$G=[a,b]\setminus F$, 则从 $G=(a,b)\cap F^C$ 知 G 是一个有界开集. 于是从上题即得本题的证明.

问题 13.4

1. 用反证法 如果题中所说的 σ 不存在, 那么一定存在 $\mathbf{R}^n$ 的一列子集 F_1, F_2, $\cdots$, 使得对 $m=1,2,\cdots$ 有 $F_m\cap E\neq\varnothing$ 且 $\operatorname{diam}(F_m)<\dfrac{1}{m}$; 但 F_m 不能被某一个 G_α 所包含. 现取点 $x_i\in F_i\cap E$, $i=1,2,\cdots$。由于 E 是有界闭集, 因而是列紧的, 点列 $\{x_i\}$ 中必有子列 $\{x_{k_i}\}$ 收敛于 $a\in E$, 因而存在某个开集 G_α 使得 $a\in G_\alpha$, 因为 G_α 是开集, 并且 $\operatorname{diam}(F_{k_i})<\dfrac{1}{k_i}$, 所以对充分大的 i, 应有 $F_{k_i}\subset G_\alpha$, 这是矛盾.

2. 设 $\{G_\alpha\}$ 对应的 Lebesgue 数为 $\sigma>0$. 用一个 n 维立方体把 E 包围在内, 再用平行于各坐标平面的平面把上述立方体切成许多相等的小立方体, 使小立方体的直径小于 σ. 把那些与 E 有公共点的闭小立方体记为 F_1, F_2, $\cdots$, F_k 则必存在 G_i, 使得 $F_i\subset G_i$, $i=1,2,\cdots,k$ 于是

$$E\subset\bigcup_{i=1}^{k}F_i\subset\bigcup_{i=1}^{k}G_i.$$

问题 13.5

1. 用反证法. 如果 $\bar{E}$ 不连通, 则有 $\bar{E}=A\cup B$, $A\cap B=\varnothing$, 且有 $A'\cap B=\varnothing$ 和 $A\cap B'=\varnothing$, 命 $A_1=A\cap E$, $B_1=B\cap E$, 则可证明 $E=A_1\cup B_1$, $A_1\cap B_1=\varnothing$ 且有 $A'_1\cap B=\varnothing$ 和 $A_1\cap B'=\varnothing$. 这就和 E 的连通性矛盾.

2. 我们只要举出一个连通集 E, 使得它的闭包 $\bar{E}$ 不是道路连通的, 那么根据上一题的结论, $\bar{E}$ 便是一个连通集, 但并不道路连通.

定义

$$E=\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2:\ y=\sin\frac{1}{x},\ 0<x\leqslant\frac{2}{\pi}\right\}.$$

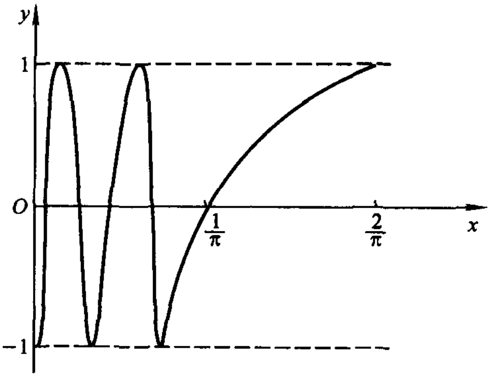


图　F13-1

它是 $\mathbf{R}^2$ 中一段连续曲线．由于 E 上任意两点可用一段连续曲线连接，它是道路连通的，因而是连通的．由于

$$x=\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)^{-1}\text{时，}\ y=1,$$

$$x=\left(2k\pi-\frac{\pi}{2}\right)^{-1}\text{时，}\ y=-1,$$

所以 $-1\leqslant y\leqslant 1$ 上每一点都是 E 的凝点，若记

$$F=\{(0,y)\in\mathbf{R}^2,\ -1\leqslant y\leqslant 1\},$$

那么 $\bar{E}=E\cup F$．下面证明 $\bar{E}$ 不是道路连通的．用反证法．如果 $\bar{E}$ 是道路连通的，任取 $\boldsymbol{a}\in E$，$\boldsymbol{b}\in F$，不妨设 $\boldsymbol{a}=(x_0,y_0)$，则有 $y_0=\sin\dfrac{1}{x_0}$，$\boldsymbol{b}=(0,y_1)$，那么一定存在位于 $\bar{E}$ 的连续曲线

$$x=x(t),\ y=y(t)\qquad(0\leqslant t\leqslant 1),$$

使得

$$x(0)=x_0,\ y(0)=y_0,$$

$$x(1)=0,\ y(1)=y_1.$$

现在命 $t_0=\inf\{t:(x(t),\ y(t))\in F\}$，则必有 $t_0>0$．因若 $t_0=0$，则有 $t_k\to 0$，使得 $(x(t_k),\ y(t_k))\in F$，于是 $x(0)=\lim\limits_{k\to\infty}x(t_k)=0$，这与 $x(0)=x_0\neq 0$ 矛盾．由 t_0 的定义，存在 $t_k\to t_0$，$(x(t_k),\ y(t_k))\in F$．由连续性，

$$\lim_{t\to t_0}x(t)=x(t_0)=\lim_{k\to\infty}x(t_k)=0.$$

另一方面，由于 $t_0>0$，当 $0\leqslant t<t_0$，对应的点 $(x(t),\ y(t))$ 不在 F 上，因而有 $(x(t),\ y(t))\in E$．于是

$$y(t_0)=\lim_{t\to t_0^-}y(t)=\lim_{t\to t_0^-}\sin\frac{1}{x(t)}$$

不存在，这是矛盾．

问题 13.7

1. 命 $A=\{p\in\mathbf{R}^n:f(p)>0\}$，$B=\{p\in\mathbf{R}^n:f(p)<0\}$. 按连通集的定义即能证得 E 的非连通性.

2. 利用练习题 13.7 第 3 题的结果命

$$h(p)=\frac{\rho(p,B)}{\rho(p,A)+\rho(p,B)},$$

这个 h 就满足问题中的三个条件.

3. 利用上题中存在的 $\mathbf{R}^n$ 中的连续函数 h，定义

$$G=\left\{p\in\mathbf{R}^n:\frac{1}{2}<h(p)\leqslant 1\right\},$$

$$H=\left\{p\in\mathbf{R}^n:0\leqslant h(p)<\frac{1}{2}\right\}.$$

这时 G 和 H 就满足题中的要求.

问题 13.8

1. 用反证法. 如果 f^{-1} 在某点 $y_0\in D$ 不连续，则必存在 $\varepsilon_0>0$，使得对任意自然数 j，在 D 中存在点列 $\{y_j\}$，使得

$$\|y_j-y_0\|<\frac{1}{j}，但 \|f^{-1}(y_j)-f^{-1}(y_0)\|\geqslant\varepsilon_0.$$

记 $x_j=f^{-1}(y_j)$，$x_0=f^{-1}(y_0)$，则 x_j，$x_0\in E$. 利用 E 的紧致性和 f 是 E 上连续的单射即可导出矛盾.

2. 由于 $[0,1]$ 是 R 中的紧集，如果存在 $[0,1]$ 到单位圆周上的一对一的连续映射，那么由上题的结论，它的逆映射也是连续的，记这逆映射为 f，再记 $\varphi(\theta)=f(\cos\theta,\sin\theta)$，则 φ 把 $[0,2\pi)$ 1-1 地映为 $[0,1]$. 由于 φ 是 $[0,2\pi]$ 上的连续函数，故必存在 θ_1，θ_2，使得 $f(\theta_1)=0$，$f(\theta_2)=1$，不妨设 $0\leqslant\theta_1<\theta_2<2\pi$. 由连续函数的介值定理，对任意 $0<c<1$ 必有 $\theta_1<\theta<\theta_2$，使得 $\varphi(\theta)=c$. 这说明 φ 把 $[\theta_1,\theta_2]$ 映成了 $[0,1]$. 这和 φ 把 $[0,2\pi)$ 1-1 地映为 $[0,1]$ 相矛盾.

3. 还利用第 1 题的结论，只要证明不存在 $[0,1]\times[0,1]$ 到 $[0,1]$ 上的一对一的连续映射即可. 如果存在这样的映射，即存在定义在正方形 $[0,1]\times[0,1]$ 上的连续函数 $f(x,y)$，它把 $[0,1]\times[0,1]$ 一一地映为区间 $[0,1]$. 用和第 2 题类似的方法即可导出矛盾.

第 14 章　多变量函数的微分学

问题 14.2

充分性：

$$\begin{aligned}&(1-t)f(x_1)+tf(x_2)-f((1-t)x_1+tx_2)\\&=(1-t)[f(x_1)-f((1-t)x_1+tx_2)]+t[f(x_2)-f((1-t)x_1+tx_2)]\\&\geqslant(1-t)Jf((1-t)x_1+tx_2)t(x_1-x_2)+tJf((1-t)x_1+tx_2)(1-t)(x_2-x_1)\\&=0.\end{aligned}$$

必要性：记 $h=b-a$，由凸函数的定义得

$$f(a+th)-f(a)\leqslant t[f(a+h)-f(a)],\qquad 0<t<1.$$

两边都减去 $tJf(a)h$，并除以 t，再让 $t\to 0$ 即得

$$f(\boldsymbol{b})-f(\boldsymbol{a})\geqslant Jf(\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}).$$

问题 14.9

1. 引进新变量 $\xi=x$，$\eta=\frac{y}{x}$，可得

$$x\frac{\partial z}{\partial x}=\xi\frac{\partial z}{\partial \xi}-\eta\frac{\partial z}{\partial \eta},$$

$$y\frac{\partial z}{\partial y}=\eta\frac{\partial z}{\partial \eta}.$$

于是

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\xi\frac{\partial z}{\partial \xi}.$$

故原方程变为

$$\xi\frac{\partial z}{\partial \xi}=z.$$

由此可得

$$z=\xi\psi(\eta)=x\psi\left(\frac{y}{x}\right).$$

这里 ψ 是任一单变量可微函数.

2. 引进新变量后，原方程变为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0.$$

故得解

$$u=\varphi(\xi)+\psi(\eta)=\varphi(x+\lambda_1 y)+\psi(x+\lambda_2 y).$$

3. 引进新变量

$$u=x+y,\quad v=\frac{y}{x},\quad w=\frac{z}{x},$$

把 $z=z(x,y)$ 的方程变为 $w=w(u,v)$ 的方程. 经过计算得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\left(\frac{1}{x}+\frac{y^2}{x^3}-\frac{y}{x^2}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}.$$

故原方程变为

$$\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}=0.$$

由此得

$$w=v\varphi(u)+\psi(u),$$

即

$$\frac{z}{x}=\frac{y}{x}\varphi(x+y)+\psi(x+y).$$

最后得

$$z=y\varphi(x+y)+x\psi(x+y).$$

第 16 章　多 重 积 分

问题 16.2

1. 可用两种方法证明$\{f_n(\boldsymbol{x})\}$在矩形 I 上一致收敛于 0：一种方法是把 Dini 定理(定理 10.8)的证明搬到二元函数中来．下面讲第二种方法——反证法：如果$\{f_n(\boldsymbol{x})\}$在 I 上不一致收敛于 0，那么一定存在 $\varepsilon_0>0$，对每个正整数 N，存在 $n>N$ 和 $\boldsymbol{x}\in I$，使得 $f_n(\boldsymbol{x})\geqslant\varepsilon$．现取 $N=1$，存在正整数 $n_1>1$ 和 $\boldsymbol{x}_1\in I$，使得 $f_{n_1}(\boldsymbol{x}_1)\geqslant\varepsilon_0$；取 $N=n_1$，存在正整数 $n_2>n_1$ 以及 $\boldsymbol{x}_2\in I$，使得 $f_{n_2}(\boldsymbol{x}_2)\geqslant\varepsilon_0$；这个过程一直可以无限地继续下去，我们就得到一列正整数 $1<n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots$，和一个点列$\{\boldsymbol{x}_k\}\subset I$，使得 $f_{n_k}(\boldsymbol{x}_k)\geqslant\varepsilon_0$．由于 I 是紧致的，$\{\boldsymbol{x}_k\}$必有收敛的子列$\{\boldsymbol{x}_{i_k}\}$，设其收敛于 $\boldsymbol{a}\in I$，从不等式

$$f_{n_{i_k}}(\boldsymbol{x}_{i_k})\geqslant\varepsilon_0.$$

可知，对每个自然数 m，只要 $n_{i_k}>m$，便有

$$f_m(\boldsymbol{x}_{i_k})\geqslant f_{n_{i_k}}(\boldsymbol{x}_{i_k})\geqslant\varepsilon_0.$$

在上式中让 $k\to\infty$，利用 f_m 的连续性，便得

$$f_m(\boldsymbol{a})\geqslant\varepsilon_0.$$

这和 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n=0$ 的假设相矛盾．

既然$\{f_n\}$在 I 上一致收敛于 0，那么对 $\varepsilon>0$，存在 N，当 $n>N$ 时，$0\leqslant f_n(\boldsymbol{x})<\dfrac{\varepsilon}{\sigma(I)}$ 对任意 $\boldsymbol{x}\in I$ 成立，因而当 $n>N$ 时

$$\int_I f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\sigma<\frac{\varepsilon}{\sigma(I)}\cdot\sigma(I)=\varepsilon,$$

此即　$\lim\limits_{n\to\infty}\int_I f\mathrm{d}\sigma=0.$

2. 用反证法　如果结论不成立，那么对 I 的任意子闭矩形，其上必有使 f 取非正值的点，因而对任意分割，所产生的下和必取非正值，由此知 f 的下积分非正，这和 $\int_I f\mathrm{d}\sigma>0$ 相矛盾．

问题 16.3

1. (1) 只要证明 f 在非有理点上连续．设(x_0,y_0)不是有理点，那么 $f(x_0,y_0)=0$．对任意 $\varepsilon>0$，要使 $f(x,y)\geqslant\varepsilon$，即 $\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{q}\geqslant\varepsilon$，满足这个条件的点只能有有限个，除去这有限个点 $f(x,y)<\varepsilon$．所以 f 的不连续点最多是个零测集，因而在$[0,1]^2$上可积．

(2) 按定义，

$$f\left(x,\ \frac{p}{q}\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{q}, & x=\dfrac{n}{m}\text{时},\\ 0, & x=\text{无理数时},\end{cases}$$

容易证明，这个函数在$[0,1]$的任何子区间$[\alpha,\beta]$上的振幅大于 $\dfrac{1}{q}$，因而在$[0,1]$上不可积．$f\left(\dfrac{n}{m},\ y\right)$的不可积性的证明是一样的．

2. g 在$[0,1]^2$上不可积是明显的，因为它在$[0,1]^2$中的任何一小部分上总有取 1 和 0 的点．但对固定的 y，若 y 无理数，则 $g(x,y)=0$，若 y 为有理数，设 $y=\dfrac{p}{m}$，则只有当

$x=\frac{1}{m},\ \frac{2}{m},\ \cdots,\ \frac{m-1}{m}$这有限个值时$g(x,y)=1$,其余都为0,因而

$$\int_0^1 g(x,y)\mathrm{d}x = 0$$

对任意$y\in[0,1]$成立，于是

$$\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1 g(x,y)\mathrm{d}x = 0.$$

同理有 $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1 g(x,y)\mathrm{d}y = 0$.

问题 16.6

1. 作变换 $x=\mathrm{e}^{r\cos\theta}$，$y=\mathrm{e}^{r\sin\theta}$，则

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r\mathrm{e}^{r\cos\theta}\mathrm{e}^{r\sin\theta}.$$

原积分变为

$$I = \iint\limits_{\Delta}\frac{\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta}{r},$$

这里的 Δ 是变换以后的积分区域. 注意 $x+y=1$ 和 $x^2+y^2=1$ 分别被变为

$$\begin{cases}\mathrm{e}^{r\cos\theta}+\mathrm{e}^{r\sin\theta}=1, & (1)\\ \mathrm{e}^{2r\cos\theta}+\mathrm{e}^{2r\sin\theta}=1. & (2)\end{cases}$$

现在来分析由上述两条曲线所围成的(r,θ)平面上的区域是什么形状. 从(1)可以看出，θ的变化范围必须使 $\cos\theta$ 和 $\sin\theta$ 都取负值，因为只要有一个取正值，(1)的左端必大于 1，(1)不能成立. 故 θ 只能在$\left[\pi,\frac{3}{2}\pi\right]$中取值. 今设(1)确定的函数为$r=r(\theta)$，则(2)确定的函数便为$r=\frac{1}{2}r(\theta)$. 经过细致的分析，可得$r=r(\theta)$和 $r=\frac{1}{2}r(\theta)$如图 F16 - 1 所示. Δ 就是夹在这两条曲线之间的区域. 所以

$$I = \iint\limits_{\Delta}\frac{\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta}{r} = \int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{2}r(\theta)}^{r(\theta)}\frac{\mathrm{d}r}{r}$$

$$= \frac{\pi}{2}\log 2.$$

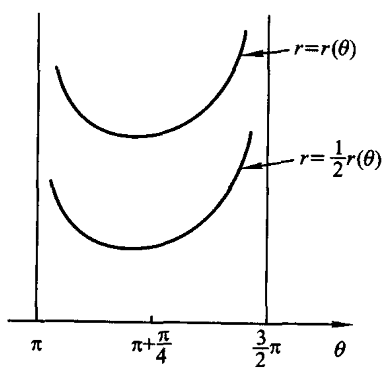


图　F16 - 1

2. 作变换

$$x=\frac{bu+av}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad y=\frac{bv-au}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

就可得到所要的结果.

3. (1) 作变换 $x=tu$，$y=tv$，则

$$F(t) = \iint\limits_{[0,1]^2} t^2 f(t^2uv)\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

所以

$$F'(t) = 2t\iint\limits_{[0,1]^2} f(t^2uv)\mathrm{d}u\mathrm{d}v + t^2\iint\limits_{[0,1]^2} 2tuvf'(t^2uv)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

再用 $u=\frac{x}{t}$，$v=\frac{y}{t}$变回去就得所要的结果.

(2) $$F(t)=\int_0^t \mathrm{d}x\int_0^t f(xy)\mathrm{d}y=\int_0^t \frac{1}{x}\mathrm{d}x\int_0^{tx} f(s)\mathrm{d}s$$
$$=\int_0^t \frac{1}{x}g(tx)\,\mathrm{d}x.$$

这里$g(u)=\int_0^u f(s)\mathrm{d}s$,于是

$$F'(t)=\frac{1}{t}g(t^2)+\int_0^t \frac{1}{x}g'(tx)x\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{t}\int_0^{t^2} f(s)\mathrm{d}s+\int_0^t f(tx)\mathrm{d}x=\frac{2}{t}\int_0^{t^2} f(s)\mathrm{d}s.$$

4. $$\iint\limits_{[0,1]^2}(xy)^{xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1(xy)^{xy}\mathrm{d}y=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x}\int_0^x t^t\mathrm{d}t$$
$$=\int_0^1\frac{1}{x}f(x)\mathrm{d}x,$$

这里$f(x)=\int_0^x t^t\mathrm{d}t$.再用分部积分就得.

问题 16.7

1. 和问题 16.6 第 3 题(1)的证明方法相同.

2. 和问题 16.6 第 3 题(2)的证明方法相同，但稍复杂些.

问题 16.8

1. 用数学归纳法. $n=2$ 时，这就是练习题 16.5 的第 4 题. 今设 $n=k$ 时等式成立，于是

$$I_{k+1}=\int_0^a\mathrm{d}x_1\int_0^{x_1}\mathrm{d}x_2\cdots\int_0^{x_k}f(x_{k+1})\,\mathrm{d}x_{k+1}$$
$$=\int_0^a\left[\int_0^{x_1}\mathrm{d}x_2\cdots\int_0^{x_k}f(x_{k+1})\,\mathrm{d}x_{k+1}\right]\mathrm{d}x_1$$
$$=\int_0^a\left[\frac{1}{(k-1)!}\int_0^{x_1}f(t)\,(x_1-t)^{k-1}\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x_1$$
$$=\frac{1}{(k-1)!}\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t\int_t^a(x_1-t)^{k-1}\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{k!}\int_0^a f(t)\,(a-t)^k\mathrm{d}t.$$

2. 用数学归纳法. $n=2$ 时已知等式成立(见练习题 16.5 第 3 题). 现设 $n=k$ 时等式成立，即

$$\int_0^a\mathrm{d}x_1\int_0^{x_1}\mathrm{d}x_2\cdots\int_0^{x_{k-1}}f(x_1)\cdots f(x_k)\,\mathrm{d}x_k=\frac{1}{k!}\left(\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t\right)^k,$$

当 $n=k+1$ 时有

$$I_{k+1}=\int_0^a\mathrm{d}x_1\int_0^{x_1}\mathrm{d}x_2\cdots\int_0^{x_{k-1}}\mathrm{d}x_{k-1}\int_0^{x_k}f(x_1)\cdots f(x_k)\,f(x_{k+1})\,\mathrm{d}x_{k+1}$$
$$=\int_0^a\left\{\int_0^{x_1}\mathrm{d}x_2\cdots\int_0^{x_k}f(x_2)\cdots f(x_{k+1})\,\mathrm{d}x_{k+1}\right\}f(x_1)\,\mathrm{d}x_1$$
$$=\int_0^a\frac{1}{k!}\left(\int_0^{x_1}f(t)\,\mathrm{d}t\right)^k f(x_1)\,\mathrm{d}x_1.$$

记　$F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$,则 $F'(x)=f(x)$,于是

$$I_{k+1}=\frac{1}{k!}\int_0^a F^k(x_1)f(x_1)\,\mathrm{d}x_1=\frac{1}{k!}\frac{1}{k+1}F^{k+1}(x_1)\Big|_0^a$$

$$=\frac{1}{(k+1)!}F^{k+1}(a)=\frac{1}{(k+1)!}\left(\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t\right)^{k+1}.$$

3. 用数学归纳法．当 $n=2$ 时要证明的等式是

$$\int_a^b \mathrm{d}x_1\int_a^{x_1} f(x_1,x_2)\,\mathrm{d}x_2=\int_a^b \mathrm{d}x_2\int_{x_2}^b f(x_1,x_2)\,\mathrm{d}x_1, \tag{1}$$

这只要考虑下面的二重积分:

$$\iint\limits_{\triangle ABC} f(x_1,x_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2.$$

先对 x_2 积分，后对 x_1 积分，即得(1)的左端；先对 x_1 积分，后对 x_2 积分即得(1)的右端，因而二者相等．现设对 $n-1$ 个变量的函数等式成立．把 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$看成 $n-1$ 个变量 x_2，…，x_n 的函数，那么有等式

$$\int_a^{x_1}\mathrm{d}x_2\int_a^{x_2}\mathrm{d}x_3\cdots\int_a^{x_{n-1}} f(x_1,\cdots,x_n)\,\mathrm{d}x_n$$

$$=\int_a^{x_1}\mathrm{d}x_n\int_{x_n}^{x_1}\mathrm{d}x_{n-1}\cdots\int_{x_3}^{x_1} f(x_1,\cdots,x_n)\,\mathrm{d}x_2.$$

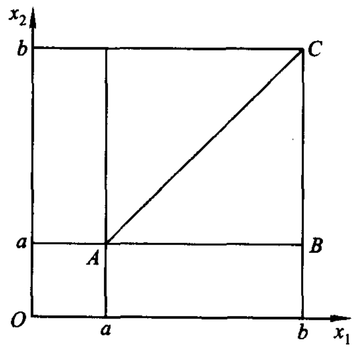


图　F16－2

两端让 x_1 在$[a,b]$中积分得

$$\int_a^b \mathrm{d}x_1\int_a^{x_1}\mathrm{d}x_2\int_a^{x_2}\mathrm{d}x_3\cdots\int_a^{x_{n-1}} f(x_1,\cdots,x_n)\,\mathrm{d}x_n$$

$$=\int_a^b \mathrm{d}x_1\int_a^{x_1}\mathrm{d}x_n\int_{x_n}^{x_1}\mathrm{d}x_{n-1}\cdots\int_{x_3}^{x_1} f(x_1,\cdots,x_n)\,\mathrm{d}x_2. \tag{2}$$

记　$\int_{x_n}^{x_1}\mathrm{d}x_{n-1}\cdots\int_{x_3}^{x_1} f(x_1,\cdots,x_n)\,\mathrm{d}x_2=g(x_1,x_n)$，

利用等式(1)，(2) 的右端可写为

$$\int_a^b \mathrm{d}x_1\int_a^{x_1} g(x_1,x_n)\,\mathrm{d}x_n=\int_a^b \mathrm{d}x_n\int_{x_n}^b g(x_1,x_n)\,\mathrm{d}x_1.$$

(2) 就变为

$$\int_a^b \mathrm{d}x_1\int_a^{x_1}\mathrm{d}x_2\int_a^{x_2}\mathrm{d}x_3\cdots\int_a^{x_{n-1}} f(x_1,\cdots,x_n)\,\mathrm{d}x_n$$

$$=\int_a^b \mathrm{d}x_n\int_{x_n}^b \mathrm{d}x_1\int_{x_n}^{x_1}\mathrm{d}x_{n-1}\int_{x_{n-1}}^{x_1}\mathrm{d}x_{n-2}\cdots\int_{x_3}^{x_1} f(x_1,\cdots,x_n)\,\mathrm{d}x_2. \tag{3}$$

记

$$\int_{x_{n-1}}^{x_1}\mathrm{d}x_{n-2}\cdots\int_{x_3}^{x_1} f(x_1,\cdots,x_n)\,\mathrm{d}x_2=h(x_1,x_{n-1},x_n),$$

再用等式(1) 可得

$$\int_{x_n}^b \mathrm{d}x_1\int_{x_n}^{x_1} h(x_1,x_{n-1},x_n)\,\mathrm{d}x_{n-1}=\int_{x_n}^b \mathrm{d}x_{n-1}\int_{x_{n-1}}^b h(x_1,x_{n-1},x_n)\,\mathrm{d}x_1.$$

这样(3)就变成

$$\int_a^b dx_1\int_a^{x_1}dx_2\int_a^{x_2}dx_3\cdots\int_a^{x_{n-1}}f(x_1,\cdots,x_n)\,dx_n$$

$$=\int_a^b dx_n\int_{x_n}^b dx_{n-1}\int_{x_{n-1}}^b dx_1\int_{x_{n-1}}^{x_1}dx_{n-2}\cdots\int_{x_3}^{x_1}f(x_1,\cdots,x_n)\,dx_2.$$

继续这个过程即可得到要证的等式.

4. 因为 $\boldsymbol{A}$ 是正定方阵，故存在正交方阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}'\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}\boldsymbol{P}$，这里 $\lambda_1>0$，$\cdots$，$\lambda_n>0$ 是 A 的 n 个特征根. 于是

$$\boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}'\boldsymbol{P}'\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}'\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}\boldsymbol{y}=\lambda_1y_1^2+\cdots+\lambda_ny_n^2,$$

这里 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}$，这是一个变量代换，变换的 Jacobian

$$\left|\frac{\partial(y_1,\cdots,y_n)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)}\right|=|\det\boldsymbol{P}|=1,$$

当然

$$\left|\frac{\partial(x_1,\cdots,x_n)}{\partial(y_1,\cdots,y_n)}\right|=1.$$

于是

$$\int\cdots\int_{\mathbf{R}^n}e^{-\boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}}dx_1\cdots dx_n=\int\cdots\int_{\mathbf{R}^n}e^{-(\lambda_1y_1^2+\cdots+\lambda_ny_n^2)}dy_1\cdots dy_n$$

$$=\left(\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\lambda_1y_1^2}dy_1\right)\cdots\left(\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\lambda_ny_n^2}dy_n\right).$$

利用

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi},\text{即可算得}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\lambda_iy_i^2}dy_i=\sqrt{\frac{\pi}{\lambda_i}}.$$

故得

$$\int\cdots\int_{\mathbf{R}^n}e^{-\boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}}dx_1\cdots dx_n=\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\lambda_1\cdots\lambda_n}}=\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\det A}}.$$

5. 从对称性可知，只要求出 $x_1\geqslant0$，$\cdots$，$x_n\geqslant0$ 那部分的体积，整个体积是这部分体积的 2^n 倍. 从条件

$$\frac{|x_i|}{a_i}+\frac{|x_n|}{a_n}\leqslant1,\quad x_1\geqslant0,\ \cdots,\ x_n\geqslant0$$

可以看出，x_n 的变化范围是 $0\leqslant x_n\leqslant a_n$；当 x_n 固定时，x_i 的变化范围是 $0\leqslant x_i\leqslant a_i\left(1-\frac{x_n}{a_n}\right)$，由此可以算得所求的体积为 $\frac{2^n}{n}a_1\cdots a_n$.

第 17 章 曲线积分

问题 17.3

1. 由上半圆周 Γ 和直径 l 围成的半圆形区域记为 G. 由假定

$$\int_\Gamma P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = 0$$

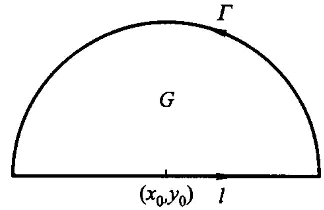


图　F17－1

由 Green 公式得

$$\int_l P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$= \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\bigg|_{(a,b)} \frac{1}{2}\pi r^2, \qquad (1)$$

这里(a,b)是 G 中某一点．另一方面，

$$\int_l P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_l P(x,y)\,\mathrm{d}x = \int_{x_0-r}^{x_0+r} P(x,y_0)\,\mathrm{d}x = P(\xi,y_0)\,2r, \qquad (2)$$

这里 $x_0 - r \leqslant \xi \leqslant x_0 + r$，比较(1)和(2)即得

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\bigg|_{(a,b)} \frac{1}{2}\pi r = 2P(\xi,y_0). \qquad (3)$$

在上式中让 $r \to 0$，即得 $P(x_0,y_0)=0$．由于(x_0,y_0)是 $\mathbf{R}^2$ 中任意点，所以 $P=0$ 在 $\mathbf{R}^2$ 中成立．再由(3)，得$\frac{\partial Q}{\partial x}\Big|_{(a,b)}=0$，让 $r\to 0$ 即得$\frac{\partial Q}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)}=0$.

2．利用第一型曲线积分和第二型曲线积分的关系以及 Green 公式，容易证明

$$\int_\Gamma v\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s = \iint_G \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + v\Delta u\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$
$$\int_\Gamma u\frac{\partial v}{\partial n}\mathrm{d}s = \iint_G \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + u\Delta v\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

两式相减即得要证的等式．

3．记 $\boldsymbol{P}_0=(x_0,y_0)$，取 ε 充分小，使得 $B_\varepsilon(\boldsymbol{P}_0)\subset G$、容易直接验证 $\log r$ 是 $G\setminus B_\varepsilon(\boldsymbol{P}_0)$ 中的调和函数．命 $v=\log r$，利用第 2 题的公式即得

$$\int_\Gamma \left(u\frac{\partial \log r}{\partial n} - \log r\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}s = \int_{\partial B_\varepsilon(\boldsymbol{P}_0)} \left(u\frac{\partial \log r}{\partial n} - \log r\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}s.$$

上式右端当 $\varepsilon \to 0$ 时极限为 $2\pi u(x_0,y_0)$.

4．利用上题的结果即得．

第 18 章　曲 面 积 分

问题 18.2

1．取新的坐标系 uvw，使得平面 π：$ax+by+cz=0$ 为 $w=0$．再在 π 中取互相垂直的两个单位向量 $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$，使 uvw 构成新的右手正交系．我们看球面上任意点(x,y,z)在 w 轴上的投影是什么．w 轴上的单位向量是$\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}(a,b,c)$，所以$(x,y,z)$在 w 轴的投影为

$$w = (x,y,z)\cdot\frac{(a,b,c)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{ax+by+cz}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

由于 $u^2+v^2+w^2=x^2+y^2+z^2=1$，所以 $u^2+v^2=1-w^2$，这就得到球面的另一种参数表示：

$$\begin{cases} u = \sqrt{1-w^2}\cos\varphi, \\ v = \sqrt{1-w^2}\sin\varphi. \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ -1 \leqslant w \leqslant 1. \\ w = w. \end{cases}$$

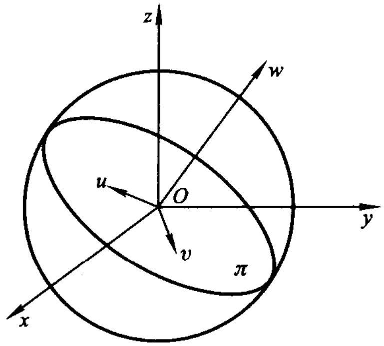


图　F17－2

在这个表示下，

$$E = \frac{1}{1-w^2},\ F = 0,\ G = 1 - w^2.$$

所以

$$\mathrm{d}\sigma = \sqrt{EG - F^2}\,\mathrm{d}w\mathrm{d}\varphi = \mathrm{d}w\mathrm{d}\varphi.$$

于是

$$\begin{aligned}\int_{\Sigma} f(ax+by+cz)\,\mathrm{d}\sigma &= \int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi} f\left(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,w\right)\mathrm{d}w\mathrm{d}\varphi \\ &= 2\pi\int_{-1}^{1} f\left(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,w\right)\mathrm{d}w .\end{aligned}$$

2. 和上题一样，取新的坐标系 uvw，使得平面 π：$x+y+z=0$ 为 $w=0$，在平面 π 中取 u 轴和 v 轴，使和 w 轴构成新的坐标系 uvw．(x,y,z)在 w 轴上的投影为 $w=\frac{1}{\sqrt{3}}(x+y+z)$，故平面 $x+y+z=t$ 在新的坐标系中为 $w=\frac{t}{\sqrt{3}}$，故 $\Sigma(t)$变为 $w=\frac{t}{\sqrt{3}}$被球面 $u^2+v^2+w^2=1$ 截下的部分，它在 $w=0$ 上的投影为 $u^2+v^2=1-w^2=1-\frac{t^2}{3}$．故所讨论的积分为

$$\begin{aligned}\int_{\Sigma(t)} [1-(u^2+v^2+w^2)]\,\mathrm{d}\sigma &= \int_0^{\sqrt{1-\frac{t^2}{3}}}\int_0^{2\pi}\left(1-\frac{t^2}{3}-r^2\right) r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{\pi}{18}(3-t^2)^2.\end{aligned}$$

3. 先用球坐标，再用第 1 题的 Poisson 公式．

问题 18.5

1. 根据外积运算的规则和行列式的定义即得．

2. 根据 $\mathrm{d}f_j$ 的定义并应用上一题的结论．

第 19 章　场的数学

问题 19.2

1. 用类似于问题 17.3 第 3 题的方法即可证明．

2. 利用上一题的等式．

3. 用反证法并利用第 2 题的结果．

第 20 章　含参变量积分

问题 20.1

1. 用积分号下求导数的法则得

$$J'_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\varphi\sin(n\varphi-x\sin\varphi)\,d\varphi,$$

$$J''_n(x)=-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^2\varphi\cos(n\varphi-x\sin\varphi)\,d\varphi.$$

直接代入要证明的恒等式即得.

2. (1)把 a 看作参数，记积分为 $I(a)$，则当 $a=b$ 时，$I(a)=\pi\log a$，当 $a\neq b$ 时，可算出

$$I'(a)=\frac{\pi}{a+b}.$$

由此即可得 $I(a)=\pi\log\frac{a+b}{2}$.

(2) 记所求的积分为 $I(a)$，可以算出

$$I'(a)=\frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}}.$$

所以 $I(a)=\arcsin a$.

(3) 记所求积分为 $I(a)$，则 $I'(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+a^2\tan^2 x}$，由此可得

$$I(a)=\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}a\log(1+|a|).$$

3. 若记

$$f(u)=\int_0^{2\pi}e^{u\cos x}\cos(u\sin x)\,dx,$$

证明对 $n=1,2\cdots$ 均有 $f^{(n)}(0)=0$. 再证明 f 能在 $(-\infty,+\infty)$ 中展开为 Taylor 级数.

问题 20.2

1. 用 Dirichlet 判别法证明它在 $[\eta,+\infty)$ 中的一致收敛性. 用反证法证明它在 $(0,\delta)$ 中不一致收敛.

2. 先证明对任意 $\varepsilon>0$，存在 $A_0>1$，当 $A>A_0$ 时

$$\int_A^{+\infty}e^{-\left(x-\frac{1}{\alpha}\right)^2/\alpha^2}dx<\varepsilon \tag{1}$$

对 $\alpha\in\left[\frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi}},1\right]$ 成立. 事实上，由于 $\int_0^{+\infty}e^{-u^2}du$ 收敛，故对 $\varepsilon>0$，存在 $A_0>1$，当 $A>A_0$ 时有

$$\int_{A-\frac{\sqrt{\pi}}{\varepsilon}}^{+\infty}e^{-u^2}du<\varepsilon. \tag{2}$$

在(1)左端的积分中作变换 $u=\frac{1}{\alpha}\left(x-\frac{1}{\alpha}\right)$，那么

$$\int_A^{+\infty}e^{-\left(x-\frac{1}{\alpha}\right)^2/\alpha^2}dx=\alpha\int_{\frac{1}{\alpha}\left(A-\frac{1}{\alpha}\right)}^{+\infty}e^{-u^2}du. \tag{3}$$

由于 $\frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi}}\leqslant\alpha\leqslant1$，$1\leqslant\frac{1}{\alpha}\leqslant\frac{\sqrt{\pi}}{\varepsilon}$，所以 $\frac{1}{\alpha}\left(A-\frac{1}{\alpha}\right)\geqslant A-\frac{\sqrt{\pi}}{\varepsilon}$. 从(3)和(2)即得

$$\int_A^{+\infty}e^{-\left(x-\frac{1}{\alpha}\right)^2/\alpha^2}dx\leqslant\int_{A-\frac{\sqrt{\pi}}{\varepsilon}}^{+\infty}e^{-u^2}du<\varepsilon.$$

当 $\alpha \in \left(0, \frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi}}\right)$ 时，由(3)得

$$\int_A^{+\infty} e^{-\left(x-\frac{1}{\alpha}\right)^2/\alpha^2} dx \leqslant \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \alpha \sqrt{\pi} < \varepsilon.$$

这就证明了原积分在$(0,1]$中一致收敛.若该积分能用 Weierstrass 判别法来判断,意味着存在函数 $g(x)$，使得$(x,\alpha) \in [1, +\infty) \times (0,1]$时有

$$e^{-\left(x-\frac{1}{\alpha}\right)^2/\alpha^2} \leqslant g(x), \tag{4}$$

且 $\int_1^{+\infty} g(x)\,dx < +\infty$.但在(4)中让 $x = \frac{1}{\alpha}$,即得 $g(x) \geqslant 1$,这和$\int_1^{+\infty} g(x)\,dx < +\infty$ 相矛盾.

3. 通过反常积分的 Cauchy 收敛原理，把问题化归级数的 Cauchy 收敛原理来处理.

问题20.3

1. 问题的关键是如何处理被积函数中的绝对值. 把积分写成

$$f(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{e^{-t}}{|\sin t|^{\alpha}} dt,$$

作变量代换 $t = x + n\pi$，那么

$$f(\alpha) = \frac{1}{1-e^{-\pi}} \int_0^{\pi} \frac{e^{-x}}{\sin^{\alpha} x} dx.$$

证明右端的积分对 $\alpha \in [0, \eta]$ $(0 < \eta < 1)$一致收敛.

2. 因为 $\varphi(u) = \int_0^{+\infty} u e^{-ux} dx = 1\ (u > 0)$，被积函数是非负且连续，而由 § 20.2 的例 1 知道上述积分在$(0,1]$中不一致收敛.当 $u \geqslant 1$ 时，

$$\psi(u) = e^{u^2} \int_0^{+\infty} u e^{-ux} dx = e^{u^2}$$

是连续函数，被积函数非负且连续，而上述积分在 $[1, +\infty)$ 中不一致收敛.

3. 把原积分记为 $I(\alpha,\beta)$，则

$$\frac{\partial I}{\partial \alpha} = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan \beta x}{x(1+\alpha^2 x^2)} dx,$$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial \alpha \partial \beta} = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+\alpha^2 x^2)(1+\beta^2 x^2)} = \frac{\pi}{2(\alpha+\beta)}.$$

由此可得 $\frac{\partial I}{\partial \alpha} = \frac{\pi}{2} \log \frac{\alpha+\beta}{\alpha}$，进而得

$$I(\alpha,\beta) = \frac{\pi}{2} \log \frac{(\alpha+\beta)^{\alpha+\beta}}{\alpha^{\alpha}\beta^{\beta}}, \quad \alpha > 0,\ \beta > 0.$$

4. 记题中的积分为 I，先算出重积分，再算相应的反常积分得 $I = \log 2$.

5. (1)利用练习题 11.1 的第 5 题即得

$$I = e^{-2a} \int_0^{+\infty} e^{-\left(x-\frac{a}{x}\right)^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2a}.$$

(2) 用分部积分法.

(3) 利用等式

$$\sin^4 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x) - \frac{1}{8}(1-\cos 4x),$$

问题就归结为计算积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos 2x}{x^2}\mathrm{d}x,\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos 4x}{x^2}\mathrm{d}x,$$

再用分部积分法就能算出这两个积分.

(4) 利用等式

$$\sin^4\alpha x-\sin^4\beta x=\frac{1}{2}(\cos 2\beta x-\cos 2\alpha x)+\frac{1}{8}(\cos 4\alpha x-\cos 4\beta x)$$

和问题 11.3 第 6 题(2)的结果即能算出所要的积分值.

6. 设积分 $\int_a^{+\infty}f(x,u_0)\mathrm{d}x$ 收敛，可写

$$\int_a^{+\infty}f(x,u_0)\,\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}g_n(u_0),$$

其中

$$g_n(u)=\int_{A_n}^{A_{n+1}}f(x,u)\,\mathrm{d}x.$$

利用定理 10.10 和问题 20.2 第 3 题的结论即得所要的证明.

问题 20.4

1. 定义域是 $0<\frac{s+1}{p}<q$,

$$f(s,p,q)=\frac{1}{pa^q}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{s+1}{p}}\frac{\Gamma\left(q-\frac{s+1}{p}\right)\Gamma\left(\frac{s+1}{p}\right)}{\Gamma(q)}.$$

2. 易知

$$I=\int_0^1\log\Gamma(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1\log\Gamma(1-x)\,\mathrm{d}x.$$

利用余元公式和等式

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\sin x\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{2}\log 2$$

即得所要的等式.

3. 用和上题相同的方法并用余元公式，可归结为计算积分

$$J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\log\sin x\mathrm{d}x.$$

用分部积分可算出 $J=-1+\log 2$. 由此可得要证明的等式.

4. 作变换 $\cos x=1-2\sqrt{t}$.

5. 利用公式

$$\frac{1}{m+k+1}=\int_0^1x^{m+k}\mathrm{d}x$$

和 B 函数和 Γ 函数的关系式.

6. 证明 $(f(x)+g(x))'=0$.

7. 利用题中的等式可得

$$\Gamma(1-x)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{1-x}n!}{(1-x)(2-x)\cdots(n+1-x)},\quad 0<x<1.$$

把 $\Gamma(x)$和 $\Gamma(1-x)$改写为

$$\Gamma(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{x}}{x(1+x)\left(1+\frac{x}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{n}\right)},$$

$$\Gamma(1-x)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{1-x}}{(1-x)\left(1-\frac{x}{2}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{n}\right)(n+1-x)}.$$

用余元公式即可证得

$$\sin\pi x=\pi x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right),\quad x\in(0,1).$$

记

$$\varphi(x)=\pi x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right),$$

它在$(-\infty,+\infty)$上都有定义，再去证明 φ 满足下面三条性质：(i) $\varphi(0)=\varphi(1)=0$，(ii) $\varphi(-x)=-\varphi(x)(-\infty<x<\infty)$，(iii) $\varphi(x+1)=-\varphi(x)(-\infty<x<\infty)$. 由于在$(0,1)$中已知 $\varphi(x)=\sin\pi x$，故在整个数轴上也有 $\varphi(x)=\sin\pi x$.

8. 按题中的步骤做.